



TITLE:

柱体に作用する波力と重複波の波
圧に関する基礎的研究(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

山口, 正隆

CITATION:

山口, 正隆. 柱体に作用する波力と重複波の波圧に関する基礎的研究. 京都大学, 1974, 工学博士

ISSUE DATE:

1974-07-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r2592>

RIGHT:

柱体に作用する波力と重複波の波圧 に関する基礎的研究

昭和49年 2 月

山 口 正 隆

柱体に作用する波力と重複波の波圧 に関する基礎的研究

昭和49年 2 月

山 口 正 隆

目 次

1. 緒 論	1
2. 小口径柱体に作用する波力に関する研究	5
2.1 概 説	5
2.2 Stokes の第2定義による有限振幅波理論	8
2.3 有限振幅波の波速, 波の峯高および水粒子速度の特性	21
2.4 有限振幅波理論による波力算定式	31
2.5 抗力係数および質量係数	35
2.6 柱体に作用する全波力	59
2.7 結 語	76
3. 大口径円柱に作用する波圧・波力に関する研究	81
3.1 概 説	81
3.2 非線型回折波理論	82
3.3 非線型回折波理論による波力算定式	92
3.4 円柱に作用する波圧および水位変動の特性	98
3.5 円柱に作用する全波力	106
3.6 結 語	109
4. 壁体に作用する重複波の波圧に関する研究	111
4.1 概 説	111
4.2 有限振幅重複波の理論式とその適合性	112
4.3 有限振幅重複波理論の波圧に関する適用限界	123
4.4 越波のある場合の重複波の波圧の特性	132
4.5 結 語	139
5. 結 論	143

1. 緒 論

わが国は国土が狭小で平野部が海岸地帯に限られているために、海岸地帯への産業・人口の集中を余儀なくされてきた。その結果、埋立による臨海工業地帯の造成をはじめとする海岸地帯の高度利用が促進されてきたが、こうした立地条件が高度な技術力と豊富な労働力とあいまって、原料加工国としてのわが国経済の飛躍的發展に大きな役割を果たしてきたと考えられる。しかしながら、船舶の大型化に加えて、用地難や環境対策などの必要から、産業経済活動の場を海上に求めざるをえない状況において防波堤や護岸をはじめとする各種の港湾施設が従来よりかなり深い海域に築造されるようになり、さらに最近では、海上空港、原子力発電所および石油貯蔵基地など各種目的の構造物や施設が建設されようとしている。

また、沿岸海洋は従来主として漁業などの生物資源の生産活動および海上輸送活動の場として考えられてきたが、海洋に関する知識の集積とともに、そこには無尽蔵ともいべき鉱物資源、化学資源およびエネルギー資源などが存在することがわかり、これらの資源を開発し有効に利用しようとする機運が高まりつつある。とくに、石油および天然ガスに関しては、すでにメキシコ湾、ペルシャ湾および北海などで大規模な海底油田の開発が行なわれている。

以上述べたように、人類の活動の場が海岸から沿岸海洋へと拡大し、いわゆる海洋開発のための各種の水深構造物が計画築造されようとしている中、こうした場合の重要な問題の1つは、沿岸海洋の気象および海象、とくに波浪特性の究明とそれに伴う波力の推定方法の確立であろう。沿岸海洋における波浪は、従来海岸近くで観測されたものに比べて、はるかに大きいことが明らかにされつつあり、海洋における波浪特性の究明のために、すでに北海における JONSWAP¹⁾ と呼ばれる大規模かつ広域的な波浪観測が実施されたことは周知のとおりである。わが国においても、この観測に比べればかなり小規模であるが、京都大学防災研究所と舞鶴海洋気象台との協同観測²⁾として、同様の観測が日本海沿岸において実施されており、また運輸省においても50m程度の水深での波浪観測が開始されている。そしてこのような巨大な波浪は構造物に繰り返し強大な波力を及ぼし、そのため海洋構造物が損傷あるいは倒壊した例が少なくない。海洋構造物の被災の例としては、テキサスタワー TT-4 の倒壊が有名である。これはアメリカ合衆国空軍がアメリカ西岸沖合の大西洋上に建造した人工の海洋レーダー観測塔群であり、そのうちの1つ TT-4 は、ニューヨーク港外約70 mile の水深約55 m の砂質土上に建設されたが、1961年1月15日観測員28人とともに海没した。この災害の調査報告書に当時の状況が詳しく述べられているが、その直接の原因は台風および冬期風による強大な波浪に起因するものである。また、Harleman ら³⁾ によって明らかにされたように、このレーダー観測塔 TT-4 はその下部構の斜材が激浪により破損されて、構造物の固有周期が長くなり、このため波浪との共振現象を起こして倒壊したと考えられている。この倒壊は波力の究明のみならず、海洋構造物の動的設計の必要性を認識させた例としても有名である。

さて、海洋構造物の基本構造物として用いられるものは小口径の柱体、大口径の柱体および鉛直壁体などであると考えられるので、海洋構造物に作用する波力の適確な推定法の確立のためには、まずこれらの

基本構造物が剛体と仮定される場合の波力の特性を解明しなければならない。

波力は波と構造物の相互作用として生ずるものであり、したがって、構造物の存在によって波動の場は多かれ少なかれ変形を余儀なくされる。構造物に作用する波力の特性を究明するにあたって、構造物による波動の変形の程度に立脚して海岸水理学の立場から、前述の基本構造物に作用する波力の取り扱いにおける著者の研究方法を明らかにすれば、つぎのようになる。すなわち、2.で述べる小口径柱体に作用する波力の研究は、構造物による波動の場の変形が実用上省略でき、波力の表現に入射波の諸量がそのまま適用できる場合であり、また柱体が大きくなって、波力に入射波のほか柱体による波の回折効果などを考慮しなければならない場合が3.で述べる大口径円柱の波力の問題である。さらに、4.で述べる鉛直壁体に作用する波圧の研究は、入射波と反射波の相互作用によって重複波が形成されるほど、波動の場が構造物によって変形される場合に相当する。かように、構造物に作用する波圧および波力の適切な推定法の確立にあたっては、構造物による波動の場の変形の程度を考慮した系統的な取り扱いが必要であろう。

このような構造物に作用する波圧および波力の計算は、現在のところそれぞれの場合に対して、Morisonの波力算定式、線型回折波理論による波力式および Sainflou の波圧式などによっており、いずれも主として微小振幅波理論かあるいはそれを若干修正したものが基本となっている。したがって、実際設計において対象とするような非線型性の強い高波高の波に対しては、一般にこれらの諸式による推定結果の精度が十分でなく、波力を過小に評価する場合も生じる。たとえば、小口径柱体に作用する波力の計算において波の特性の表示式に微小振幅波理論を用いるならば、高波高の波を対象とする場合、一定の抗力係数および質量係数を用いた有限振幅波理論による結果に比べて過小な値を与えることになる。また、抗力係数および質量係数と波や柱体特性との関係が必ずしも十分明確でない現在、これら両係数の合理的な選択は、きわめて困難な問題である。大口径円柱に作用する波力に対する回折波理論の適用性に関しては、いまだ十分な検討が行なわれておらず、とくに波の非線型性が波圧や波力に及ぼす影響に関しては全く未解明の状態である。さらに、壁体に作用する波圧の計算に用いられる Sainflou 式はトロコイド波理論より導かれたもので、回転性を有するという物理的欠陥をもち、実験結果との比較によれば、波形こう配の影響を含む高次項を省略しているために精度が悪く、一般に比水深の値のあまり小さくないときには波圧を大きく見積り、安全側の値を与えるが、比水深の値が小さく、波高の大きな波に対してはかえって小さく見積ることになって、危険側の値を与えることがわかっている。

以上のように、現行の波圧および波力の計算方法は波の非線型性の影響を十分考慮しておらず、またそれらに及ぼす波の非線型効果に関して不明な点が少なくないと考えられる。しかし、近年海岸水理学の進歩とともに、せつ動法による有限振幅波理論の高次解の展開に伴って、波の非線型性の効果を理論的にある程度評価することが可能になってきた。いわゆるせつ動法は、基礎方程式系に含まれる微小なパラメーターに関して未知量を展開できるものと仮定し、逐次近似を進めて解を求めていく手法であって、有限振幅進行波理論である Stokes 波およびクノイド波理論に対してはそれぞれ第5次および第3近似解まで、また三角関数の級数和として表わされた有限振幅重複波理論およびクノイド波の干渉問題として解かれた有限振幅定常長波理論に対しては、それぞれ第5次および第2近似解まで計算されており、そのほか海岸水理学上の非線型問題の近似解法としてしばしば有効に用いられてきた。

前述した波力に関する研究の現状を考えて、著者は本論文において、有限振幅波理論に基づく波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響の解明という立場から、非砕波の規則的な波によって、海洋構造物の基本構造物である小口径柱体、大口径円柱および壁体に作用する波圧・波力を適確に推定するための基礎研究を実施したが、各章の研究手法と内容の概略を述べれば、つぎのとおりである。

まず、2.小口径柱体に作用する波力に関する研究は小口径の鉛直円柱、鉛直角柱および水平円柱に作用する全波力の推定に対して、有限振幅波理論を用いた波力算定式の適用性を実験結果との比較より検討したものである。すなわち、2.1では、有限振幅波理論の適用性や小口径柱体に作用する従来の研究成果の概要と問題点を述べて、本章の研究目的を明らかにする。2.2では、波速に対する Stokes の第2定義を用いて Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第3近似解を追計算するとともに、著者により追計算されたクノイド波理論と Laitone のそれとの関係を解析的に明らかにする。2.3では、これら有限振幅波理論の波速、波の峯高および水粒子速度に対する適用性を詳細な実験結果との比較において検討する。2.4では第2定義による有限振幅波理論を Morison の波力算定式に導入し、小口径柱体に作用する全波力の計算式を誘導する。また、2.5では、有限振幅波理論による全波力式に基づいて、柱体の抗力係数および質量係数の算出方法を述べるとともに、これら両係数と波や柱体の特性との関係や両係数の位相変化の全波力に及ぼす影響をそれぞれの柱体に対して詳細に考察する。さらに、2.6では全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較から、有限振幅波理論による全波力式の適用性を明らかにする。一方、実験結果の次元解析に基づく考察から全波力に及ぼす波や柱体の特性の影響を調べるとともに、次元解析結果と理論計算の結果との関係を考察する。また、急こう配の斜面上での鉛直円柱に作用する全波力の推定に対して前述した理論計算および次元解析結果の適用性について簡単に述べる。

ついで、3.大口径円柱に作用する波圧・波力に関する研究においては、大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響を理論的に解明するために、非線型回折波理論を展開し、それに基づく波圧・波力の算定式を誘導して、その妥当性を実験結果との比較から検討する。すなわち、3.1では、この問題に関する従来の研究を紹介し、波の非線型性の波圧・波力に及ぼす影響が全く未解明であることを指摘する。3.2では、せつ動法を用いて非線型回折波理論の第2次近似解を計算し、波の非線型効果を含めた波圧および水位変動の表示式を導く。ついで、3.3では、非線型回折波理論の第2次近似解より全波力式を誘導するとともに、全波力および質量係数に及ぼす波の非線型効果を数値計算によって検討する。3.4では、波圧および水位変動に関する前述した理論結果と実験結果との比較を試み、とくに波形の非対称性など波圧に及ぼす波の非線型効果がこの理論によってどの程度解明できるかを考察して理論の妥当性を確かめる。3.5では、全波力および質量係数の理論結果の妥当性を実験結果との比較より検討し、この結果から大口径円柱に作用する波圧・波力の推定法を明らかにする。

さらに、4.壁体に作用する重複波の波圧に関する研究では、重複波の波圧の推定法を明らかにするために、主として有限振幅重複波理論に立脚して、その各近似解の境界条件に対する適合性と実験結果との比較における適用限界を明らかにするとともに、越波のある場合の波圧に対するこの理論の適用性を考察する。4.1では、従来の研究成果を要約し、本章での研究目的および内容について述べる。ついで、4.2では Tadjbakhsh および Keller ならびに首藤による有限振幅重複波理論の概要を述べるとともに、各近似解

の自由表面境界条件に対する理論的適合性を数値的に検討して、せつ動解の高次化の有効性を明らかにする。4.3では、波圧に関する実験結果と理論結果との詳細な比較から、有限振幅重複波理論の波圧に対する適用限界を明らかにする。また、境界条件に対する理論的適合性と波圧に対する適用限界との関連を検討して、この立場から壁体に作用する重複波の波圧の推定法を明らかにする。さらに、4.4では、越波のある場合の壁体に作用する波圧に対する有限振幅重複波理論の適用性を実験結果との比較により詳細に検討して、こうした場合の波圧計算法を提案する。

最後に、5.結論においては、本論文で得られた主要な研究の成果を要約する。

参 考 文 献

- 1) Barnett, T. P. : Wind Waves and Swell in the North Sea, EOS, Trans. AGU., Vol.51, No.7, 1970, pp.544~550.
- 2) 土屋義人：日本海沿岸における冬期波浪の協同観測，京大防災研年報，第16号A，1973，pp.29~39.
- 3) Harleman, D. R. F., Nolan, W. C. and Honsinger, V. C. : Dynamic Analysis of Offshore Structure, Proc. 8th Conf. on Coastal Eng., 1962, pp.482~499.

2. 小口径柱体に作用する波力に関する研究

2.1 概 説

海中構造物の計画設計にあたって、主たる外力の1つである波力の適確な推定が重要であることはすでに緒論において繰り返し述べたが、こうした波力を解明するためには、一般に流体力学の基礎方程式を適切な境界条件のもとで厳密に解くことが要求される。しかし、その厳密解を求めることは現状においてはほとんど不可能であり、本研究で検討する剛な柱体に作用する波力の問題に対しては、近似的な取り扱いとして現在2つの方法が用いられていると考えられる。第1の方法は流体の粘性を無視して完全流体の運動とし、さらに波動運動を線型化して得られる基礎方程式と境界条件から解を見出すいわゆる回折波理論である。

第2の方法は波力を抗力と慣性力の和として表示するいわゆる Morison の方法¹⁾であって、Morison 以来多くの研究が行われてきた。2.での研究方法は、これらのうち、後者の Morison の方法を踏襲し、最近の有限振幅波理論の適用を試みようとするものである。したがって、ここでは従来の主要な研究成果を要約し、その問題点を指摘するとともに、本研究との関連を述べる。

柱体に作用する波力に関する最初の系統的な研究は、Morison ら²⁾によって行われた。かれらは、柱体に作用する波力を抗力と慣性力の和として表わし、実験や観測による波力の資料から微小振幅波理論に基づく波の水粒子速度や加速度を用いて、抗力係数および質量係数を決定することにより、柱体に作用する波力の定量的表現をはじめて可能にした。また、かれらはひきつづき、柱体の断面形状効果や隣接円柱の影響をも検討している。この方法は波の運動場が物体によって変形をうけず、波動運動を一樣水深における進行波として表現できること、非砕波の波であることおよび波力を抗力と慣性力の線型和として表現できることなどの仮定にたっているものである。その方法の適否は別にして、こうした Morison 流の考え方に基づいて波力を解析していく場合問題になるのは、静水面上の波の峯高、水粒子速度および加速度の正確な推定と抗力係数および質量係数の適切な選択である。実際設計においては微小振幅波理論の適用が不十分である場合が少なくなく、有限振幅波理論を用いて波の特性を計算するか、あるいは実測による必要がある。有限振幅の進行波に対しては、その理論解として Stokes 波理論、クノード波理論および孤立波理論、また数値解として Dean³⁾による流れ関数波動理論や Chappellear⁴⁾による数値波動理論などが展開されている。

有限振幅波理論の適合性について波の水粒子速度の観点から検討した研究としては、すでに Le Méhauté ら⁵⁾および岩垣ら⁶⁾の研究があり、また波の水粒子速度の詳細な測定結果として合田⁷⁾の研究がある。合田はプロベラ式流速計を用いて波の水平水粒子速度を広範囲な実験より測定し、波の峯および谷における水粒子速度を表わす実験式を与えた。また、Le Méhauté らおよび岩垣らはそれぞれ中立浮遊粒子をトレーサーとして用いる方法、水素気泡をトレーサーとして用いる方法およびホットフィルム流速計を用いて波の水平水粒子速度を測定し、有限振幅波理論との比較を行なっている。これらのほとんどの結果において、

Le Méhautéらは、合田の実験式をも含めて種々の有限振幅波理論のいずれもが波の水粒子速度を十分に表現できないと結論づけている。これに対して、岩垣らはこれらの理論の適用範囲内では理論曲線と実験結果は比較的良好に一致すると述べている。Le Méhautéらの実験はかなり大きな波高 ($h/H = 2 \sim 2.5$, h : 水深, H : 波高) を対象としているのに対して、岩垣らの実験はそれほど波高の大きくない波 ($h/H < 3$) を扱っているという実験条件の相違や実験装置および実験方法の相違はあるが、このことは波の水粒子速度の測定の困難さを示すものであろう。また、現在の有限振幅波理論では基礎方程式から直接波速が決定されず、そのためいわゆる波速に対する Stokes の第 1 および第 2 定義といわれる付加的な条件が必要であるという波動理論に関する根本的な問題がある。前述のいずれの研究でもこの点が考慮されておらず、第 1 定義による Stokes 波理論および第 2 定義によるクノイド波理論などの有限振幅波の理論解と実験結果とがそれぞれ比較されており、これらの定義による有限振幅波理論の差違を明確にする必要がある。なお、鉛直水粒子速度についてはほとんど測定が行なわれておらず、これに対しての有限振幅波理論の適用性は全く不明であるといわねばならない。

さて、こうした波の有限振幅の効果を波力算定式に導入する試みはすでに Reid および Bretschneider⁸⁾ Harleman および Shapiro⁹⁾、野田¹⁰⁾、Agershou および Edens¹¹⁾、Evans¹²⁾、さらに Aagaard ら¹³⁾ により行なわれている。これらの研究では、有限振幅波理論として Michell-Havelock の最高波理論、Stokes 波の第 2 次および第 5 次近似解や流れ関数波動理論などが用いられており、とくに流れ関数波動理論によるものは、かなりまとまった結果が得られているようである。一方、合田¹⁴⁾は有限振幅波理論を適用するかわりに、静水面上の波の峯高や波の峯における水粒子速度分布を測定して、波の有限振幅の効果を波力の算定に考慮している。

つぎに問題になるのは、抗力係数および質量係数の関数形である。抗力係数は一様流の場合には物体の形状と Reynolds 数の関数として与えられるが、通常の波動運動のように鉛直方向に流速が変化し、同時に周期的に変動する非定常流中において、これらがどのような関数形をもつか、また波力算定式の使用に際して、いかなる値を採用するかは重要な問題である。合田は波形、水粒子速度および波力のモーメントを測定して解析した結果、実測水粒子速度を使用するならば、多少のばらつきはあるが、抗力係数は一様流での値にほぼ一致し、質量係数はほぼ一定値をとることを示し、また樋口¹⁵⁾も深海波の場合の波力の実験から抗力係数が一様流での値と比較的良好に一致することを見出している。Keulegan-Carpenter¹⁶⁾は重複波の節で水平円柱に作用する波力を測定してフーリエ解析により抗力係数および質量係数を求め、両者とも Keulegan-Carpenter 数 $U_m D/T$ の関数であること、Keulegan-Carpenter 数はうず発散 (vortex shedding) の程度を示すためのよい指標であることおよびこれらの係数は波の 1 周期の間に変化することを示した。ここで、 U_m : 最大水平水粒子速度、 T : 周期および D : 円柱の直径、である。しかしながら、一般に物体の振動特性を無視して次元解析的に考えるならば、抗力係数および質量係数は、Reynolds 数、Iversen 数 (Keulegan-Carpenter 数の逆数に相当) および Froude 数の関数として表示される。さらに、水粒子速度や加速度はその水中での位置と時間の関数であるから、一般的な意味においては、両係数は水中での位置および時間の関数とも考えられる。したがって、これらの係数の詳細な検討は今後に残された大きな問題である。上述の議論はさておき、波動運動場における抗力係数の値については、Wilson およ

び Reid¹⁷⁾によりまとめられたように、多数の実験結果が報告されているが、その値はかなりの幅をもって散乱している。この原因の1つとしては、大部分の実験結果では水粒子速度として微小振幅波理論を用いていることによるものであって、高次近似解を用いれば、この散乱の幅は小さくなることが知られている。

抗力係数が Reynolds 数の関数とするならば、一般に設計を行なう場合、対象となる Reynolds 数は $R_e > 10^6$ であることが多いが、この範囲の Reynolds 数に対する実験は非常に困難であるので、もっぱら現地観測に依存している状態である。円柱に作用する波力の現地観測については、すでにアメリカ合衆国で比較的多く実施されているが、実際の海岸波浪のもとでの観測では Wiegel ら¹⁸⁾の結果に見られるように、波の不規則性とあいまって資料のばらつきが非常に大きく十分な成果は得られていないようである。これらの結果によれば、一様流の場合と同様に波浪中においても臨界 Reynolds 数が存在するようであり、この領域においては抗力係数が急激に減少する傾向を示している。Agershou および Edens は Stokes 波の第5次近似解を用いて Wiegel らの資料を解析したが、必ずしも高次近似解を用いることがまとまった結果を与えるものでなく、抗力係数や質量係数の決定には統計的なアプローチが必要であると述べている。この原因として種々の周波数と振幅よりなる海岸波浪に規則波の理論を用いること、試験円柱が支持されている構造物周辺の乱れの効果および波力測定装置の誤差などが考えられる。また、これらの Reynolds 数の領域における実験は Ross¹⁹⁾や Blumberg ら²⁰⁾によりなされている。Blumberg らの結果によれば、この領域の抗力は円柱表面の相対粗度によって支配されるようになり、滑面のときの0.5から粗面のときの1.0まで変化している。この粗度の抗力係数に及ぼす効果を調べた実験が Burton ら²¹⁾によってなされており、Reynolds 数の値のより小さい領域においても、相対粗度の増加とともに抗力係数は若干の増加を示している。一様流中での抗力係数が物体のまわりの流れの状態と密接に関連していることはよく知られているが、波動運動の場合も同様のことが考えられる。とくに、波動運動の場合、物体の後面に形成され、発散された渦は水粒子速度の方向が逆転するとき、再び物体に沿って動くといった複雑な流況を示し、このことが抗力係数の値にばらつきを与える一因ともなっていると考えられる。これらの問題を扱った例として、Laird, Johnson および Walker²²⁾は静水中で円柱を周期運動させることにより、ある条件下ではうずの効果がかなりあることを示した。また Sarpkaya ら²³⁾は一方向流れで一定加速度の場合を取り扱い、抗力係数と質量係数の理論式を導くとともに、それらの値を実際のうずの挙動と結びつけて決定し、両係数のうずとの関連を詳細に検討した結果、両係数の間にある関係の存在することを見出した。このことは MacNown ら²⁴⁾によっても指摘されていることである。さらに、うずの発散の程度が Keulegan-Carpenter 数によってよく表示されることはすでに述べたが、これは鉛直流速の存在しない振動流中におけるものであって、実際の波浪中におかれた構造物の場合にはより複雑な機構が考えられ、現在のところほとんど研究が行なわれていないようである。なお、こうしたうずの発散は波の進行方向と直角方向の力(揚力)を発生させ、その大きさがかなりの程度になることが Wiegel や Bidde²⁵⁾によって報告されている。

質量係数については、ポテンシャル流理論によって $C_M = 2$ として与えられ、設計面でもこの値を採用するのが妥当であるとされているが、Wilson および Reid や合田の結果では平均値として2より小さい値を与えているのに対して、Jen²⁶⁾の研究では規則波および不規則波について2より大きな値を与えており、この点については波力に縮尺効果が見られるという Paape および Breusers²⁷⁾の研究と関連して今

後の研究が必要であろう。さらに、最近では、堀川ら²⁸⁾は斜面上に設置された比較的口径の大きい円柱に作用する砕波力に関する研究において、非砕波の波による波力を評価する場合水粒子加速度と慣性力との位相差を考慮する必要があることを述べている。この方法によれば、質量係数および抗力係数はそれぞれ線型回折波理論による結果および一様流の場合の Goldstein の NPL 曲線とよく一致することを示した。しかし、実験が底こう配 1/30 の斜面上におけるものであるにもかかわらず、水粒子加速度および位相差の評価に一様水深での微小振幅波理論を用いていることや口径の大きい円柱の場合の抗力が最大波力のせいぜい 10% 程度であることを考えると、その結果の精度に若干の疑問があると思われる。

以上、柱体に作用する波力を規則波として取り扱った研究の概略を述べたが、波動運動に伴う現象の複雑さや波力に関係する要素が多いため、必ずしも十分統一的な成果が得られているとはいえないと考えられる。そこで 2. では非砕波の波によって剛な柱体に作用する波力を対象とし、さらに、柱体による波の回折効果を見捨てた小口径柱体に作用する波力を取り扱うことにする。まず、2.2 で波速に対する Stokes の第 2 定義を用いて Stokes 波の第 4 次近似解およびクノイド波の第 3 近似解を追計算するとともに、Chappelear および Laitone によるクノイド波理論の相互関係を明らかにし、つづいて 2.3 においては従来の有限振幅波理論をも含めたこれらの理論解の波速、静水面上の波の峯高および水粒子速度に対する適合性を実験結果との比較より考察する。2.4 では、Morison の波力算定式にこれら有限振幅波理論を導入し、鉛直柱体および水平円柱に作用する全波力の算定式を導く。2.5 では、これらの式に基づいて、鉛直円柱、鉛直角柱および水平円柱に関する全波力の実験結果から柱体の抗力係数および質量係数を算出し、これら両係数と波や柱体の特性との関係を究明する。つぎに 2.6 において、柱体に作用する全波力について計算結果および実験結果との比較から、有限振幅波理論を用いた波力算定式の適合性を検討するとともに、次元解析および理論計算から波や柱体の特性との関係を明らかにする。さらに、比較的急な斜面上に設置された鉛直円柱に非砕波の波によって作用する全波力の特性を一様水深あるいは緩こう配上における実験結果との比較で考察するとともに、理論計算結果と実験結果との比較からその適用性を検討する。最後に 2.7 では、以上で得られた成果をまとめて結語とする。

2.2 Stokes の第 2 定義による有限振幅波理論

すでに 2.1 で述べたように、Stokes 波およびクノイド波理論で代表される現在の有限振幅波理論では、その基礎方程式から波速が一義的に決定されず、そのため Stokes の第 1 および第 2 定義といわれる付加的な条件が必要になっている。有限振幅波理論については、すでに多くの研究者により計算が進められてきたが、Skjelbreia および Hendrickson²⁹⁾ の解に見られるように、Stokes 波理論は数値解を含めて暗黙のうちに第 1 定義によって計算されているのに対して、クノイド波理論では両方の定義が用いられている。表 2.1 は従来の有限振幅波理論の主要なものをこれらの定義によって分類したものであるが、この波速の定義による有限振幅波理論の差異に関してはほとんど検討されていない。

そこで、2.2 では第 2 定義による Stokes 波の第 4 次近似解およびクノイド波の第 3 近似解を追計算し、従来の有限振幅波理論との比較を試み、その特性を考察する。

表-2.1 波速の定義による有限振幅波理論の分類

波動理論 \ 波速の定義	第 1 定義	第 2 定義
解析解 (Stokes 波理論)	Stokes (第2次近似解) Skjelbreia ³⁰⁾ (第3次近似解) 田中 ³¹⁾ (第3次近似解) Skjelbreia および Hendrickson (第5次近似解) De ³²⁾ (第5次近似解) Bretschneider ³³⁾ (第5次近似解)	著者 (第4次近似解)
解析解 (クノイド波理論)	Chappellear ³⁴⁾ (第3近似解)	Keulegan および Patterson ³⁵⁾ (第1近似解) Laitone ³⁶⁾ (第2近似解) 著者 (第3近似解)
数値解 (Stokes 波理論)	Chappellear Dean	

2.2.1 波速の定義

Le Méhauté³⁷⁾ はつぎのように述べている。「進行する monochromatic waves に対して、速度ポテンシャル $\phi = f(x-ct)$ であるような定常解（その場合、解は一意的であるが）を求める努力がなされてきた。ここに、 c ：波速に等しい定数、 x ：水平座標および t ：時間である。その定常解は同一の形であるけれども、 c は決定されず c の決定のためには別り条件が必要である。」また Stokes³⁸⁾ は約100年前波形の伝播速度はそれ自身波速の有効な定義を与えるものでないことを示し、進行波の波速に対する2つの定義を提案した。その第1は波速に対する Stokes の第1定義といわれるものであり、波の進行方向の任意断面における一波長あたりの平均の水平水粒子速度が零であること、すなわち水平水粒子速度が時間的にも空間的にも周期的であることを意味し、次式で定義される。

$$c = \frac{\int_0^L (c+u) dx}{\int_0^L dx} \quad (2.1)$$

ここに、 L ：波長および u ：静止座標系からみた水平水粒子速度である。第2は波速に対する Stokes の第2定義といわれるものであって、定常化された運動場において一波長あたりの平均運動量が零であること、すなわち波速が水塊の重心の速度に等しいことを意味し、次式で定義される。

$$c = \frac{\int_0^L \int_{-h}^{\eta} (c+u) dz dx}{\int_0^L \int_{-h}^{\eta} dz dx} \quad (2.2)$$

ここに、 η ：平均水面からの水位変動および z ：平均水面より鉛直上方にとった座標である。

一般的にいえば、第1定義による波速は第2定義のそれに比べて大きな値を示し、また深海波および孤立波の場合には、両者は正確に一致する。

2.2.2 第2定義によるStokes 波の第4次近似解

ここでは、Skjelbreia および Hendrickson によるせつ動法に従って、第2定義による Stokes 波の第4次近似解を誘導する。いま、非粘性非回転の流体運動とし、さらに図-2.1に示すような波速 c で移動させた動座標系 X, z を用い、次式による無次元量

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{k\phi}{c\lambda}, \quad \bar{X} = kX, \quad \bar{z} = kz, \\ \bar{\eta} &= \frac{k\eta}{\lambda}, \quad \bar{h} = kh, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{k}{g}}c, \\ \bar{Q} &= \frac{kQ}{\lambda^2}, \quad \bar{u} = \frac{u}{c\lambda}, \quad \bar{w} = \frac{w}{c\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

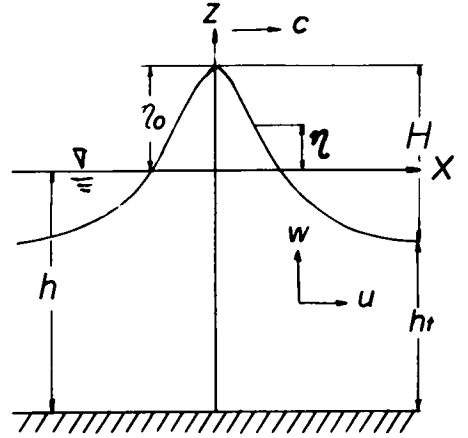


図-2.1 座標系

を定義すれば、波の伝播とともに変形しない波動運動の基礎方程式は周知のように、次式で表わされる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{X}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (2.4)$$

ここに、 $\bar{\phi}$ は無次元化された速度ポテンシャルであって、次式で定義される。

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{X}}, \quad \bar{w} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \quad (2.5)$$

また、境界条件は水底 $\bar{z} = -\bar{h}$ において、

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.6)$$

であり、水面 $\bar{z} = \bar{\eta}$ における運動学的条件および力学的条件はそれぞれ

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{X}} - \lambda \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{X}} = 0 \quad (2.7)$$

および

$$-\bar{c}^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{X}} + \bar{\eta} + \lambda \left[\frac{1}{2} \bar{c}^2 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{X}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} + \bar{Q} \right] = 0 \quad (2.8)$$

である。ここに、 $k = 2\pi/L$ ：波数、 λ ：波形こう配に相当する微小パラメーター、 g ：重力の加速度、 Q ：Bernoulliの定数および w ：鉛直水粒子速度である。

さて、以上の諸式においては、微小パラメーター λ が含まれているので、近似解を求めるために、せつ動法が適用できる。すなわち、式(2.4)および(2.6)を満足する速度ポテンシャル $\bar{\phi}$ と対称性および周期性を満足する水位変動 $\bar{\eta}$ が第4次近似に対して微小パラメータ λ のべきでそれぞれ次式のように展開されるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} = & (A_{01} + \lambda A_{02} + \lambda^2 A_{03} + \lambda^3 A_{04}) \bar{X} + (A_{11} + \lambda^2 A_{13}) \cosh(\bar{h} + \bar{z}) \sin \bar{X} \\ & + (\lambda A_{22} + \lambda^3 A_{24}) \cosh 2(\bar{h} + \bar{z}) \sin 2\bar{X} + \lambda^2 A_{33} \cosh 3(\bar{h} + \bar{z}) \sin 3\bar{X} \\ & + \lambda^3 A_{44} \cosh 4(\bar{h} + \bar{z}) \sin 4\bar{X} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$\bar{\eta} = \cos \bar{X} + (\lambda B_{22} + \lambda^3 B_{24}) \cos 2\bar{X} + \lambda^2 B_{33} \cos 3\bar{X} + \lambda^3 B_{44} \cos 4\bar{X} \quad (2.10)$$

ここに、 A_{ij} および B_{ij} : 決定されるべき係数である。

式(2.9)の右辺第1項は他の項と同様調和関数で、しかも式(2.6)を満足する関数であるが、Skjelbreiaらの仮定には含まれていないものである。さらに、Bernoulliの定数および波速に対してつぎの級数形を仮定する。

$$\bar{Q} = C_3 + \lambda^2 C_4 \quad (2.11)$$

$$\bar{c}^2 = C_0^2 (1 + \lambda^2 C_1) \quad (2.12)$$

ここに、 C_i : 決定されるべき係数である。

つぎに、未定係数 A_{ij} (A_{02} および A_{04} を除く)、 B_{ij} および C_i を決定するために、式(2.9)～(2.12)を水面における2つの境界条件、式(2.7)および(2.8)に代入し、Skjelbreiaらの方法にならって双曲線関数を $\bar{\eta}$ に関し、さらに展開して、 λ のべきおよび $\cos i\bar{X}$ あるいは $\sin i\bar{X}$ ($i = 1 \sim 4$) にグループ分けをし、各項を零とおけば、式(2.7)および(2.8)から A_{ij} 、 B_{ij} および C_i に対するつぎの連立方程式が得られる

$$A_{01} = 0 \quad (2.13)$$

$$A_{11} \sinh \bar{h} - 1 = 0 \quad (2.14)$$

$$A_{03} = 0 \quad (2.15)$$

$$A_{02} + \frac{1}{2} A_{11} B_{22} \cosh \bar{h} + A_{22} \cosh 2\bar{h} + \frac{3}{8} A_{11} \sinh \bar{h} + A_{13} \sinh \bar{h} = 0 \quad (2.16)$$

$$-2B_{22} + A_{11} \cosh \bar{h} + 2A_{22} \sinh 2\bar{h} = 0 \quad (2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} & -2B_{24} + 2A_{02} B_{22} + \frac{1}{8} A_{11} \cosh \bar{h} + \frac{3}{2} A_{11} B_{33} \cosh \bar{h} + \frac{1}{2} A_{13} \cosh \bar{h} \\ & - \frac{3}{2} A_{33} \cosh 3\bar{h} + 2A_{22} \sinh 2\bar{h} + 2A_{24} \sinh 2\bar{h} + \frac{1}{2} A_{11} B_{22} \sinh \bar{h} \\ & - A_{22} \sinh 2\bar{h} - \frac{1}{2} A_{11} B_{33} \cosh \bar{h} - \frac{1}{48} A_{11} \cosh \bar{h} + \frac{1}{2} A_{13} \cosh \bar{h} \\ & + \frac{1}{2} A_{11} B_{22} \sinh \bar{h} + A_{22} \sinh 2\bar{h} + \frac{9}{2} A_{33} \cosh 3\bar{h} + \frac{1}{16} A_{11} \cosh \bar{h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

$$-3B_{33} + \frac{3}{2} A_{11} B_{22} \cosh \bar{h} + 3A_{22} \cosh 2\bar{h} + 3A_{33} \sinh 3\bar{h} + \frac{3}{8} A_{11} \cosh \bar{h} = 0 \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{aligned} & -4B_{44} + \frac{3}{2} A_{11} B_{33} \cosh \bar{h} + 2B_{22} A_{22} \cosh 2\bar{h} + \frac{3}{2} A_{33} \cosh 3\bar{h} + 4A_{44} \sinh 4\bar{h} \\ & + \frac{1}{4} A_{11} B_{22} \sinh \bar{h} + \frac{1}{2} A_{11} B_{33} \cosh \bar{h} + \frac{1}{48} A_{11} \cosh \bar{h} + \frac{1}{16} A_{11} \cosh \bar{h} + \frac{1}{4} A_{11} B_{22} \sinh \bar{h} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} & + A_{22} \sinh 2\bar{h} + 2A_{22}B_{22} \cosh 2\bar{h} + \frac{1}{2}A_{11}B_{22} \sinh \bar{h} + A_{22} \sinh 2\bar{h} + \frac{9}{2}A_{33} \cosh 3\bar{h} = 0 \\ & \frac{1}{2}A_{11}^2 \cosh 2\bar{h} - 2A_{02} + \frac{2}{C_0^2}C_3 - A_{11} \sinh \bar{h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} & A_{02}^2 + \frac{1}{2}A_{11}^2 \cosh 2\bar{h} + 2A_{22}^2 \cosh^2 2\bar{h} - 2A_{04} + A_{11}A_{13} \cosh^2 \bar{h} + 2A_{22}^2 \sinh^2 2\bar{h} \\ & + A_{11}A_{13} \sinh^2 \bar{h} - \frac{2}{C_0^2}C_1C_3 + \frac{2}{C_0^2}C_4 + 3A_{11}A_{22} \sinh 3\bar{h} - \frac{1}{2}A_{11}B_{22} \cosh \bar{h} \\ & + A_{02}A_{11} \sinh \bar{h} + A_{13} \sinh \bar{h} - 2A_{22} \cosh 2\bar{h} - 4A_{22}B_{22} \sinh 2\bar{h} - \frac{1}{8}A_{11} \sinh \bar{h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$- 2A_{11} \cosh \bar{h} + \frac{2}{C_0^2} = 0 \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{1}{2}A_{11} \cosh \bar{h} - \frac{1}{4}A_{11} \cosh \bar{h} - A_{11}B_{22} \sinh \bar{h} - A_{11}^2 \sinh 2\bar{h} - 2A_{13} \cosh \bar{h} \\ & + 2A_{02}A_{11} \cosh \bar{h} + 2A_{11}A_{22} \cosh 3\bar{h} - 4A_{22} \sinh 2\bar{h} - \frac{2}{C_0^2}C_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

$$- A_{11} \sinh \bar{h} + \frac{1}{2}A_{11}^2 - 4A_{22} \cosh 2\bar{h} + \frac{2}{C_0^2}B_{22} = 0 \quad (2.25)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2}A_{11}^2 \cosh 2\bar{h} + A_{11}^2B_{22} \sinh 2\bar{h} - \frac{1}{2}A_{11}B_{22} \cosh \bar{h} - \frac{1}{2}A_{11}B_{22} \cosh \bar{h} \\ & - \frac{1}{8}A_{11} \sinh \bar{h} - A_{11}B_{33} \sinh \bar{h} - \frac{1}{24}A_{11} \sinh \bar{h} - A_{13} \sinh \bar{h} + A_{02}A_{11} \sinh \bar{h} \\ & + 3A_{11}A_{22} \sinh 3\bar{h} - 4A_{22} \cosh 2\bar{h} - 4A_{24} \cosh 2\bar{h} + 4A_{02}A_{22} \cosh 2\bar{h} \\ & + A_{11}A_{13} \cosh^2 \bar{h} + 3A_{11}A_{33} \cosh 4\bar{h} - A_{11}A_{13} \sinh^2 \bar{h} - \frac{2}{C_0^2}B_{22}C_1 \\ & + \frac{2}{C_0^2}B_{24} - 9A_{33} \sinh 3\bar{h} + A_{11}A_{22} \sinh \bar{h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

$$- \frac{1}{4}A_{11} \cosh \bar{h} - A_{11}B_{22} \sinh \bar{h} - 4A_{22} \sinh 2\bar{h} - 6A_{33} \cosh 3\bar{h} + 2A_{11}A_{22} \cosh \bar{h} + \frac{2}{C_0^2}B_{33} = 0 \quad (2.27)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2}A_{11}B_{22} \cosh \bar{h} - A_{11}B_{33} \sinh \bar{h} - \frac{1}{24}A_{11} \sinh \bar{h} - 2A_{22} \cosh 2\bar{h} \\ & - 4A_{22}B_{22} \sinh 2\bar{h} - 9A_{33} \sinh 3\bar{h} + A_{11}A_{22} \sinh \bar{h} + 2A_{22}^2 \cosh^2 2\bar{h} \\ & - 8A_{44} \cosh 4\bar{h} + 3A_{11}A_{33} \cosh 2\bar{h} - 2A_{22}^2 \sinh^2 2\bar{h} + \frac{2}{C_0^2}B_{44} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

式(2.13)～(2.28)の連立方程式を A_{ij} , B_{ij} および C_i について解いて次元をもとせば、それぞれは kh , A_{02} および A_{04} の関数として次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_{01} &= 0, \quad A_{03} = 0, \quad A_{11} = \frac{1}{\sinh kh}, \quad A_{13} = -\frac{(5 \cosh^2 kh + 1) \cosh^2 kn}{8 \sinh^5 kh} - \frac{A_{02}}{\sinh kh} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{22} &= \frac{3}{8 \sinh^4 kh}, & A_{24} &= \frac{192 \cosh^8 kh - 424 \cosh^6 kh - 312 \cosh^4 kh + 480 \cosh^2 kh - 17}{768 \sinh^{10} kh} \\ & - \frac{3 A_{02}}{8 \sinh^4 kh}, & A_{33} &= \frac{-4 \cosh^2 kh + 13}{64 \sinh^7 kh} \\ A_{44} &= \frac{80 \cosh^6 kh - 816 \cosh^4 kh + 1338 \cosh^2 kh - 197}{1536 (-1 + 6 \cosh^2 kh) \sinh^{10} kh} \end{aligned} \right\} (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{22} &= \frac{(2 \cosh^2 kh + 1) \cosh kh}{4 \sinh^3 kh} \\ B_{24} &= \frac{272 \cosh^9 kh - 504 \cosh^7 kh - 192 \cosh^5 kh + 322 \cosh^3 kh + 21 \cosh kh}{384 \sinh^9 kh} \\ B_{33} &= \frac{24 \cosh^6 kh + 3}{64 \sinh^6 kh} \\ B_{44} &= \frac{768 \cosh^{11} kh - 448 \cosh^9 kh - 48 \cosh^7 kh + 48 \cosh^5 kh + 106 \cosh^3 kh - 21 \cosh kh}{384 (6 \cosh^2 kh - 1) \sinh^9 kh} \end{aligned} \right\} (2.30)$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \tanh kh, & C_1 &= \frac{8 \cosh^4 kh - 8 \cosh^2 kh + 9}{8 \sinh^4 kh} + 2 A_{02} \\ C_3 &= \frac{1}{4 \sinh kh \cosh kh} + \frac{\sinh kh}{\cosh kh} A_{02} \\ C_4 &= \frac{4 \cosh^6 kh + 16 \cosh^4 kh - 38 \cosh^2 kh + 9}{64 \sinh^7 kh \cosh kh} + \frac{4 \cosh^4 kh + 5}{8 \sinh^3 kh \cosh kh} A_{02} \\ &+ \frac{2 \sinh kh}{\cosh kh} A_{02}^2 + \frac{\sinh kh}{\cosh kh} A_{01} \end{aligned} \right\} (2.31)$$

最後に、 A_{02} および A_{04} を決定するために、式(2.2)に c 、 u および η を代入して、 λ のべきを考慮して計算すれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_{02} &= -\frac{\cosh kh}{2 kh \sinh kh} \\ A_{04} &= \frac{4 \cosh^7 kh - 20 \cosh^5 kh + 16 \cosh^3 kh - 9 \cosh kh}{32 kh \sinh^7 kh} - \left(\frac{\cosh kh}{2 kh \sinh kh} \right)^2 \end{aligned} \right\} (2.32)$$

以上のかわりに、 A_{02} および A_{04} を決定する場合に式(2.1)で表わされる第1定義を用いるならば、 $A_{02} = A_{04} = 0$ となって、これらの係数は Skjelbreia (30) の結果と完全に一致する。したがって波速、水平水粒子速度および鉛直水粒子速度は第4次近似に対して、それぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{c}{\sqrt{gh}} &= \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh} (1 + \lambda^2 C_1)} \\
\frac{u}{c} &= \lambda^2 A_{02} + \lambda^4 A_{04} + (\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13}) \cosh k(h+z) \cos kX \\
&\quad + 2(\lambda^2 A_{22} + \lambda^4 A_{24}) \cosh 2k(h+z) \cos 2kX + 3\lambda^3 A_{33} \cosh 3k(h+z) \cos 3kX \\
&\quad + 4\lambda^4 A_{44} \cosh 4k(h+z) \cos 4kX \\
\frac{w}{c} &= (\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13}) \sinh k(h+z) \sin kX + 2(\lambda^2 A_{22} + \lambda^4 A_{24}) \sinh 2k(h+z) \sin 2kX \\
&\quad + 3\lambda^3 A_{33} \sinh 3k(h+z) \sin 3kX + 4\lambda^4 A_{44} \sinh 4k(h+z) \sin 4kX
\end{aligned} \right\} (2.33)$$

ここに、 λ と波高 H との関係は式(2.34)で示される。

$$2(\lambda + \lambda^3 B_{33}) = kH \quad (2.34)$$

結局、第1定義による Stokes 波の第4次近似解と第2定義によるその係数の相違は A_{02} , A_{04} , A_{13} , A_{24} , C_1 , C_3 および C_4 であり、したがって波速、水平および鉛直水粒子速度は異なるが、表面波形は形式上一致する。ただし、周期、水深および波高を与えて波の水理特性を計算する場合には、波速が異なるので、両者は必ずしも一致しない。またそれぞれの定義による波速は式(2.33)から、深海波の場合には一致することおよび第2定義による水平水粒子速度は水粒子の周期的な運動に対して波による平均質量輸送速度を相殺する高次の一様流を重ね合わせたものであることがわかる。さらに、これらの理論解を用いれば、圧力、質量輸送速度分布あるいは shoaling などの計算結果が若干異なってくるが、ここでは省略することにする。

2.2.3 第2定義に基づく Chappellear によるクノイド波の第3近似解

Chappellear は波速の決定に第1定義を用いてクノイド波の第3近似解を計算し、佐伯ら⁽⁴⁰⁾は同じ方法で再計算を行なって Chappellear の計算結果の誤りを訂正している。その結果を前述した動座標系における波の諸特性として示せば、つぎのようになる。すなわち、波速は

$$\left. \begin{aligned}
\frac{c}{\sqrt{gh}} &= 1 + \left\{ L_3 + L_0 \left(1 - \frac{E}{K} \right) \right\} + \left\{ 5 L_0 L_3 \left(1 - \frac{E}{K} \right) + \frac{5}{3} L_0^2 + \frac{4}{3} L_0^2 \kappa^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{5}{3} L_0^2 (1 + \kappa^2) \frac{E}{K} \right\} + \left[10 L_0 L_3^2 \left(1 - \frac{E}{K} \right) + L_0^3 \left\{ \frac{1}{25} (81 + 221\kappa^2 + 58\kappa^4) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{25} (81 + 244\kappa^2 + 81\kappa^4) \frac{E}{K} \right\} + 15 L_0^2 L_3 + 12 L_0^2 L_3 \kappa^2 - 12 L_0^2 L_3 (1 + \kappa^2) \frac{E}{K} \right] \right\} (2.35)
\end{aligned}$$

で表わされ、また波長は次式となる。

$$\frac{L}{h} = \frac{4K}{\sqrt{3L_0}} \quad (2.36)$$

さらに、波形は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta}{h} = & \left\{ 2L_3 + L_0(1 + \kappa^2) - L_0\kappa^2 \operatorname{sn}^2 \right\} + \left[L_3^2 + \frac{3}{20} L_0^2 (12 + 23\kappa^2 + 12\kappa^4) + 6L_0L_3(1 + \kappa^2) \right. \\ & - \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{5}{2} L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) + 6L_0L_3\kappa^2 \right\} + \frac{3}{4} L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^4 \left. \right] + \left[\frac{27}{560} L_0^3 (80 + 223\kappa^2 + 223\kappa^4 \right. \\ & + 80\kappa^6) + \frac{3}{2} L_0^2 L_3 (12 + 23\kappa^2 + 12\kappa^4) + 15L_0L_3^2 (1 + \kappa^2) - \left\{ \frac{1}{80} L_0^3 (502\kappa^2 \right. \\ & + 1279\kappa^4 + 502\kappa^6) + 25L_0^2 L_3 \kappa^2 (1 + \kappa^2) + 15L_0L_3\kappa^2 \left. \right\} \operatorname{sn}^2 + \left\{ \frac{301}{80} L_0^3 \kappa^4 (1 + \kappa^2) \right. \\ & \left. \left. + \frac{15}{2} L_0^2 L_3 \kappa^4 \right\} \operatorname{sn}^4 - \frac{101}{80} L_0^3 \kappa^6 \operatorname{sn}^6 \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

となり、水粒子速度は水平および鉛直成分に対してそれぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & 1 + (L_3 + L_0\kappa^2 \operatorname{sn}^2) + \left[L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) \operatorname{sn}^2 + 5L_0L_3\kappa^2 \operatorname{sn}^2 + L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^4 + \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} L_0^2 \kappa^2 + \frac{3}{2} L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) \operatorname{sn}^2 - \frac{9}{4} L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^4 \right] + \left[\left\{ \frac{7}{5} L_0^3 \kappa^2 (1 + \kappa^2)^2 \right. \right. \\ & + L_0^3 \kappa^4 + 9L_0^2 L_3 \kappa^2 (1 + \kappa^2) + 10L_0L_3^2 \kappa^2 \left. \right\} \operatorname{sn}^2 + \left\{ -\frac{9}{5} L_0^3 (1 + \kappa^2) \kappa^4 + 9L_0^2 L_3 \kappa^4 \right\} \operatorname{sn}^4 \\ & + \frac{6}{5} L_0^3 \kappa^6 \operatorname{sn}^6 + \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \left\{ -\frac{3}{4} L_0^3 \kappa^2 (1 + \kappa^2) - \frac{15}{4} L_0^2 L_3 \kappa^2 (1 - \kappa^2 + \kappa^4) \operatorname{sn}^2 \right. \\ & + \frac{15}{2} L_0^2 L_3 \kappa^2 (1 + \kappa^2) \operatorname{sn}^2 + \frac{15}{4} L_0^3 \kappa^4 (1 + \kappa^2) \operatorname{sn}^4 - \frac{45}{4} L_0^2 L_3 \kappa^4 \operatorname{sn}^4 - \frac{15}{2} L_0^3 \kappa^6 \operatorname{sn}^6 \left. \right\} \\ & + \left(1 + \frac{z}{h} \right)^4 \left\{ -\frac{3}{16} L_0^3 \kappa^2 (1 + \kappa^2) + \frac{3}{16} L_0^3 \kappa^2 (2 + 13\kappa^2 + 2\kappa^4) \operatorname{sn}^2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{45}{16} L_0^3 \kappa^4 (1 + \kappa^2) \operatorname{sn}^4 + \frac{45}{16} L_0^3 \kappa^6 \operatorname{sn}^6 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left(1 + \frac{z}{h} \right) \frac{2\kappa^2}{\sqrt{3L_0}} \operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn} \left[\frac{3}{2} L_0^2 + \left\{ \frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 L_0^3 (1 + \kappa^2 - 3\kappa^2 \operatorname{sn}^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} L_0^3 (1 + \kappa^2) + \frac{15}{2} L_0^2 L_3 + 3\kappa^2 L_0^3 \operatorname{sn}^2 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

ここに、 κ ：だ円関数の母数、 K および E ：第1種および第2種完全だ円積分、 sn , cn および dn ：Jacobiのだ円関数であり、それぞれ $\operatorname{sn} = \operatorname{sn}(2KX/L)$ 、 $\operatorname{cn} = \operatorname{cn}(2KX/L)$ および $\operatorname{dn} = \operatorname{dn}(2KX/L)$ を表わす。また、 L_0 および L_3 は微小なパラメーターであって、つぎの2つの式より κ および H/h の関数として求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{H}{h} = & \kappa^2 L_0 \left[1 + \frac{1}{4} L_0 (10 + 7\kappa^2) + 6L_3 + \left\{ \frac{1}{40} L_0^2 (251 + 489\kappa^2 + 151\kappa^4) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} L_0 L_3 (50 + 35\kappa^2) + 15L_0^2 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ 2L_3 + L_0 \left(\kappa^2 + \frac{E}{K} \right) \right\} + \left[L_0^2 \left\{ -\frac{1}{5} (1 - 6\kappa^2 - 9\kappa^4) + 2(1 + \kappa^2) \frac{E}{K} \right\} \right. \\ & + 6L_0L_3 \left(\kappa^2 + \frac{E}{K} \right) + L_3^2 \left. \right] + \left[L_0^2L_3 \left\{ -2(1 - 6\kappa^2 - 9\kappa^4) + 20(1 + \kappa^2) \frac{E}{K} \right\} \right. \\ & + 15L_0L_3^2 \left(\kappa^2 + \frac{E}{K} \right) + L_0^3 \left\{ \frac{1}{175} (-102 - 302\kappa^2 + 944\kappa^4 + 675\kappa^6) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{25} (111 + 289\kappa^2 + 111\kappa^4) \frac{E}{K} \right\} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

つぎに、第2定義によるクノイド波理論の第3近似解を求めよう。クノイド波理論の場合には、Stokes波理論の場合と異なり、他の水理量は同一であるので、波速だけを第2定義で計算すればよい。

第2定義による波速を計算するために、式(2.35)および(2.38)を式(2.2)に代入し、 L_0 および L_3 のべきと次式

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{L} \int_0^L \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\sqrt{3}L_0}{2h} X \right) dX = \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{E}{K} \right) \\ S_2 &= \frac{1}{L} \int_0^L \operatorname{sn}^4 \left(\frac{\sqrt{3}L_0}{2h} X \right) dX = \frac{1}{3\kappa^4} \left\{ -2(1 + \kappa^2) \frac{E}{K} + \kappa^2 + 2 \right\} \\ S_3 &= \frac{1}{L} \int_0^L \operatorname{sn}^6 \left(\frac{\sqrt{3}L_0}{2h} X \right) dX = \frac{1}{15\kappa^6} \left\{ (38\kappa^4 - 53\kappa^2 + 8) \frac{E}{K} + 30\kappa^6 - 64\kappa^4 + 57\kappa^2 - 8 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

を考慮して若干煩雑な計算を進めれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} &= 1 + (L_3 + L_0\kappa^2S_1) + \left[-\frac{1}{4}L_0^2\kappa^2 + \left\{ 5L_0L_3\kappa^2 + \frac{3}{2}L_0^2\kappa^2(1 + \kappa^2) \right\} S_1 \right. \\ & - \frac{3}{4}L_0^2\kappa^4S_2 + L_0^2\kappa^4S_1^2 \left. \right] + \left[-\frac{63}{80}L_0^3\kappa^2(1 + \kappa^2) - \frac{9}{4}L_0^2L_3\kappa^2 + \left\{ 10L_0L_3^2\kappa^2 \right. \right. \\ & + \frac{27}{2}L_0^2L_3\kappa^2(1 + \kappa^2) + \frac{12}{5}L_0^3\kappa^2(1 + \kappa^2)^2 + \frac{1}{80}L_0^3\kappa^2(46 + 119\kappa^2 \\ & + 46\kappa^4) \left. \right\} S_1 + \left\{ -\frac{27}{4}L_0^2L_3\kappa^4 - \frac{241}{80}L_0^3\kappa^4(1 + \kappa^2) \right\} S_2 + \frac{101}{80}L_0^3\kappa^6S_3 \\ & + \left\{ 9L_0^2L_3\kappa^4 + 3L_0^3\kappa^4(1 + \kappa^2) \right\} S_1^2 - \frac{3}{2}L_0^3\kappa^6S_1S_2 + L_0^3\kappa^6S_1^3 \left. \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

ただし、第1近似では両者は一致する。

$\kappa \rightarrow 1$ の極限においては、周知のようにクノイド波は孤立波になるが、この場合、式(2.35)と(2.43)は一致し、波速は次式で表わされる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + (L_3 + L_0) + (3L_0^2 + 5L_0L_3) + (10L_0L_3^2 + 27L_0^2L_3 + \frac{57}{5}L_0^3) \quad (2.44)$$

2.2.4 Chappellear および Laitone によるクノイド波理論の第2近似解の相互関係

2.2.3 では、Chappellear によるクノイド波の第3近似解に基づいて、第2定義によるクノイド波の第3近似解を誘導した。一方、クノイド波の第2近似解については Laitone により第2定義を用いた計算が行なわれ、またその適用については岩垣ら⁴¹⁾によって、クノイド波理論の初等関数表示であるハイパボリック波の展開をはじめとする多くの研究が行なわれてきた。そこで、2.2.4 では著者が導いた第2定義を用いたクノイド波の第2近似解による波の諸特性と Laitone のそれとの関係を解析的に検討する。

さて、Chappellear の理論における展開パラメータである L_0 と L_3 との関係、式(2.40)および(2.41)を第2近似解に対して改めて示すと、つぎのようである。

$$\frac{H}{h} = \kappa^2 L_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} L_0 (10 + 7\kappa^2) + 6L_3 \right\} \quad (2.45)$$

$$\left. \begin{aligned} 2L^3 + L_0 \left(\kappa^2 + \frac{E}{K} \right) + L_0^2 \left\{ -\frac{1}{5} (1 + 6\kappa^2 - 9\kappa^4) + 2(1 + \kappa^2) \frac{E}{K} \right\} \\ + 6L_0 L_3 \left(\kappa^2 + \frac{E}{K} \right) + L_3^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

いま、 L_0 および L_3 が H/h のべき級数として展開されるものとすれば、

$$L_0 = a_1 \frac{H}{h} + a_2 \left(\frac{H}{h} \right)^2 + \dots \quad (2.47)$$

$$L_3 = b_1 \frac{H}{h} + b_2 \left(\frac{H}{h} \right)^2 + \dots \quad (2.48)$$

となる。 a_1, a_2, b_1 および b_2 は式(2.47)および(2.48)を式(2.45)および(2.46)に代入して H/h のべきごとにその係数を零とおけば直ちに求められ、第2近似に対して、結局次式が得られる。

$$L_0 = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{H}{h} \right) - \frac{1}{4\kappa^4} \left(10 - 5\kappa^2 - 12 \frac{E}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right)^2 \quad (2.49)$$

$$\left. \begin{aligned} L_3 = -\frac{1}{2\kappa^2} \left(\kappa^2 + \frac{E}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right) + \frac{1}{40\kappa^4} \{ (-6\kappa^4 + 26\kappa^2 + 1) \\ + 5 \frac{E}{K} (-3\kappa^2 + 2 - \frac{E}{K}) \} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

式(2.49)および(2.50)を式(2.36)～(2.39)および式(2.43)の第2近似まで考慮した式に代入し、若干の計算を行なえば、微小パラメーター L_0 および L_3 が現われない形の波の諸特性を表わす式がそれぞれつぎのように得られる。すなわち、波速および波長に対して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2\kappa^2} \left(2 - \kappa^2 - 3 \frac{E}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right) + \frac{1}{40\kappa^4} \{ -16 + 16\kappa^2 - 4\kappa^4 \\ + 5 \frac{E}{K} (2 - \kappa^2 + 3 \frac{E}{K}) \} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

および

$$\frac{L}{h} = \frac{4\kappa K}{\sqrt{3(H/h)}} \left\{ 1 + \frac{1}{8\kappa^2} \left(10 - 5\kappa^2 - 12 \frac{E}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right) \right\} \quad (2.52)$$

が得られ、また静水面上の波の峯高、波の谷からの水深および波形はそれぞれ次式で表わされる。

$$\frac{\eta_0}{h} = \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{E}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right) + \frac{1}{4\kappa^4} \left\{ 2(\kappa^2 - 1) + \frac{E}{K} (2 - \kappa^2) \right\} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \quad (2.53)$$

$$\frac{h_t}{h} = 1 + \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \kappa^2 - \frac{E}{K} \right) \left(\frac{E}{K} \right) + \frac{1}{4\kappa^4} \left\{ 2(\kappa^2 - 1) + \frac{E}{K} (2 - \kappa^2) \right\} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \quad (2.54)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta}{h} = & \left\{ \text{cn}^2 - \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{E}{K} \right) \right\} \left(\frac{H}{h} \right) + \frac{1}{4\kappa^4} \left\{ 2(\kappa^2 - 1) + \frac{E}{K} (2 - \kappa^2) \right. \\ & \left. - 3\kappa^4 \text{cn}^2 + 3\kappa^4 \text{cn}^4 \right\} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

さらに、水粒子速度は水平および鉛直方向の成分として次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & 1 + \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} \left(\kappa^2 - \frac{E}{K} \right) - \text{cn}^2 \right\} \left(\frac{H}{h} \right) + \left[\frac{1}{40\kappa^4} \left\{ -6\kappa^4 - 4\kappa^2 + 4 \right. \right. \\ & + 5 \frac{E}{K} \left(\kappa^2 + 2 - \frac{E}{K} \right) \left. \right\} + \frac{1}{4\kappa^2} \left(5\kappa^2 - 2 \frac{E}{K} \right) \text{cn}^2 - \frac{5}{4} \text{cn}^4 + 3 \left\{ 2 \frac{z}{h} \right. \\ & \left. + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{1}{4\kappa^2} (1 - \kappa^2) + \frac{1}{2\kappa^2} (-1 + 2\kappa^2) \text{cn}^2 - \frac{3}{4} \text{cn}^4 \right\} \left. \right] \left(\frac{H}{h} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left(1 + \frac{z}{h} \right) \sqrt{\frac{3}{\kappa^2} \left(\frac{H}{h} \right)^3} \text{sn cn dn} \left(1 + \frac{1}{8\kappa^2} \left[\left(-18 + 11\kappa^2 + 16 \frac{E}{K} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - 4\kappa^2 \text{cn}^2 \right) + 4 \left\{ 2 \frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} (1 - 2\kappa^2 + 3\kappa^2 \text{cn}^2) \right] \right) \left(\frac{H}{h} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

なお、孤立波の場合には、式(2.50)～(2.56)はそれぞれ次式のように変形される。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} \right) - \frac{1}{20} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \quad (2.58)$$

$$\frac{L}{h} \rightarrow \infty \quad (2.59)$$

$$\frac{h_t}{h} = 1 \quad (2.60)$$

$$\frac{\eta_0}{h} = \frac{H}{h} \quad (2.61)$$

$$\frac{\eta}{h} = \text{sech}^2 \left(\frac{H}{h} \right) - \frac{3}{4} (\text{sech}^2 - \text{sech}^4) \left(\frac{H}{h} \right)^2 \quad (2.62)$$

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = 1 + \left(\frac{1}{2} - \text{sech}^2 \right) \left(\frac{H}{h} \right) + \left[-\frac{3}{20} + \frac{5}{4} \text{sech}^2 - \frac{5}{4} \text{sech}^4 + 3 \left\{ 2 \frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \right]$$

$$\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2 - \frac{3}{4}\operatorname{sech}^4\right)\left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad \left\{ \right. \quad (2.63)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left(1 + \frac{z}{h}\right) \sqrt{3\left(\frac{H}{h}\right)^3 \tanh \operatorname{sech}^2 \left(1 + \frac{1}{8}\left[(-7 - 4\operatorname{sech}^2)\right.\right.} \\ & \left. \left. + 4\left\{2\frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}(-1 + 3\operatorname{sech}^2)\right]\right)\left(\frac{H}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

ここに、 h_t : 波の谷からの水深、 η_0 : 静水面上の波の峯高をあらわし、また $\operatorname{sech} = \operatorname{sech} \alpha X$, $\tanh = \tanh \alpha X$ および $\alpha = \left\{ \sqrt{(H/h)/2h} \right\} \left\{ 1 - (5/8)(H/h) \right\}$ である。

一方、Laitone によるクノイド波理論は水深として波の谷におけるものを用いているので、平均水深を用いた Chappellear のクノイド波理論と直接比較することができず、そのため、波の谷における水深で表示した諸式を平均水深による表示に変換する必要がある。しかし、この点についてはすでに Laitone⁽⁴²⁾ により計算されているので、その結果を静水面にとった座標系になおして示すと、つぎの各式になる。すなわち、波速および波長は

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \left(M_1 - \frac{N_1}{2}\right)\left(\frac{H}{h}\right) + \left(M_2 + \frac{M_1 N_1}{2} - \frac{N_1^2}{8} - \frac{N_2}{2}\right)\left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad (2.65)$$

$$\frac{L}{h} = \frac{4\pi K}{\sqrt{3(H/h)}} \left\{ 1 + \left(\frac{7\kappa^2 - 2}{8\kappa^2} - \frac{3}{2}N_1\right)\left(\frac{H}{h}\right) \right\} \quad (2.66)$$

であり、また静水面上の波の峯高、波の谷からの水深および波形に対しては、それぞれ

$$\frac{\eta_0}{h} = 1 + \left(M_1 - \frac{N_1}{2}\right)\left(\frac{H}{h}\right) + \left(M_2 + \frac{M_1 N_1}{2} - \frac{N_1^2}{8} - \frac{N_2}{2}\right)\left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad (2.67)$$

$$\frac{h_t}{h} = 1 - N_1\left(\frac{H}{h}\right) - N_2\left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad (2.68)$$

$$\frac{\eta}{h} = (\operatorname{cn}^2 - N_1)\left(\frac{H}{h}\right) + \left(-\frac{3}{4}\operatorname{cn}^2 + \frac{3}{4}\operatorname{cn}^4 - N_2\right)\left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad (2.69)$$

で表わされる。さらに、水平および鉛直水粒子速度は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & 1 + \left(1 - \frac{1}{2\kappa^2} - \frac{N_1}{2} - \operatorname{cn}^2\right)\left(\frac{H}{h}\right) - \left(-\frac{N_1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\kappa^2} - \operatorname{cn}^2\right)\right. \\ & \left. + \frac{N_1^2}{8} + \frac{N_2}{2} + \frac{21\kappa^4 - 6\kappa^2 - 9}{40\kappa^4} - \left[\frac{7\kappa^2 - 2}{4\kappa^2} + \frac{3}{2}\left(2 - \frac{1}{\kappa^2}\right)\right.\right. \\ & \left. \left. \left\{2\frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}\right]\operatorname{cn}^2 + \left[\frac{5}{4} + \frac{9}{4}\left\{2\frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}\right]\operatorname{cn}^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\kappa^2}-1\right)\left\{2\frac{z}{h}+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}\left(\frac{H}{h}\right)^2 \\ \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left(1+\frac{z}{h}\right)\sqrt{\frac{3}{\kappa^2}\left(\frac{H}{h}\right)^3}\operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn}\left(1+\left[\frac{5}{2}N_1-\frac{5\kappa^2+2}{8\kappa^2}\right.\right. \\ & \left.\left.-\left(1-\frac{1}{2\kappa^2}\right)\left\{2\frac{z}{h}+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}-\frac{1}{2}\operatorname{cn}^2+\frac{3}{2}\left\{2\frac{z}{h}+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}\operatorname{cn}^2\right]\right)\left(\frac{H}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

である。ここに、

$$\left. \begin{aligned} M_1 = & \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{K}\right) \\ M_2 = & \frac{1}{\kappa^4}\left\{-\frac{1}{40}\left(\kappa^4+14\kappa^2-9\right)+\frac{E}{K}\left(\frac{E}{K}+\frac{3}{4}\kappa^2-1\right)\right\} \\ N_1 = & \frac{1}{\kappa^2}\left(\kappa^2-1+\frac{E}{K}\right) \\ N_2 = & \frac{1}{4\kappa^4}\left\{2\left(1-\kappa^2\right)-\left(2-\kappa^2\right)\frac{E}{K}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

である。

さて、式(2.65)～(2.71)に式(2.72)を代入して計算を行なえば、鉛直水粒子速度 w/\sqrt{gh} を除いて、Chappelear の式(2.51)～(2.56)と完全に一致することがわかる。

鉛直水粒子速度は式(2.71)から計算すれば、クノイド波および孤立波の場合についてそれぞれ次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left(1+\frac{z}{h}\right)\sqrt{\frac{3}{\kappa^2}\left(\frac{H}{h}\right)^3}\operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn}\left(1+\frac{1}{8\kappa^2}\left[\left(-22+15\kappa^2+20\frac{E}{K}\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left.4\kappa^2\operatorname{cn}^2\right)+4\left\{2\frac{z}{h}+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}\left(1-2\kappa^2+3\kappa^2\operatorname{cn}^2\right)\right]\right)\left(\frac{H}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left(1+\frac{z}{h}\right)\sqrt{3\left(\frac{H}{h}\right)^3}\tanh \operatorname{sech}^2\left(1+\frac{1}{8}\left[\left(-7-4\operatorname{sech}^2\right)\right.\right. \\ & \left.\left.+4\left\{2\frac{z}{h}+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}\left(-1+3\operatorname{sech}^2\right)\right]\right)\left(\frac{H}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

式(2.57)と(2.73)および式(2.64)と(2.74)を比較すれば明らかなように、クノイド波の場合は、第2近似の定数項の係数が若干異なるのに対して、孤立波の場合には一致する。この原因としては、鉛直水粒子速度に対して、Chappelear の理論は第3近似で $(H/h)^{5/2}$ まで考慮しているが、Laitone のそれは第2近似で $(H/h)^{5/2}$ まで含めているためであると考えられる。

以上の計算より第2定義を用いた Chappellear および Laitone によるクノイド波の第2近似解は、その波の諸特性を H/h のべき級数で表示すれば、鉛直水粒子速度を除いて一致することがわかる。しかしながら、両者の近似度を比較するならば、同じ次数の近似解に対し、Laitone の解は Chappellear の解の展開パラメーターである L_0 および L_3 をさらに H/h で展開し、その最初の2項のみを用いていることになるので、現象との対応はさておき、Chappellear の理論の方が Laitone のそれに比べて近似度が高いといえよう。

2.3 有限振幅波の波速、波の峯高および水粒子速度の特性

2.2 では第2定義による Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第3近似解を導いたので、ここでは波速、静水面上の波の峯高および水粒子速度の実験を行ない、従来の有限振幅波理論をも含めた各種の理論結果と実験結果とを比較検討して、これら有限振幅波理論の適合性を明らかにする。

2.3.1 波速の特性

(1) 実験装置および実験方法

実験に用いた水槽は図-2.2に示すように京都大学防災研究所宇治川水理実験所にある幅50cm、深さ65cm、長さ63mの波浪基礎実験水槽で、造波機は鉄製の枠の上のレールを造波板付きの台車が往復運動するピストン型のものである。実験は $T\sqrt{g/h}$ の値が一定になるように周期と水深を固定し、波高を変化させて行なった。波速は造波機側の水槽端より16m～30m離れた位置に、300.4cm～303.4cmの間隔で設置した2台の電気抵抗線式波高計によってペン書きオシログラフ上に記録させた水位変動の時間的な変化から、4～5波の峯の距離を読みとり、波が2つの波高計の間を進む時間を求めて算出した。また、波高は2台の波高計の記録の平均値を用いた。表-2.2には実験条件および実験波の特性を一括して示す。

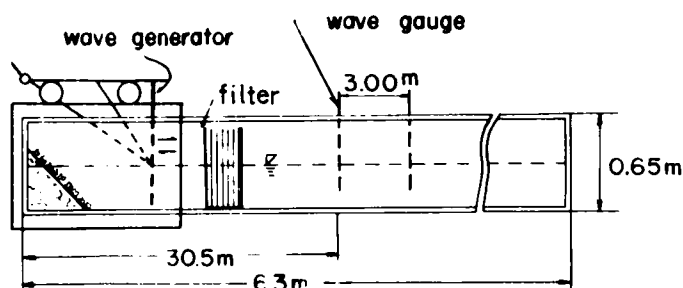


図-2.2 実験装置の概略図

表-2.2 実験条件および実験波の特性
(波速に関する実験の場合)

周期 T_{sec}	水深 h_{cm}	$T\sqrt{g/h}$	波高 H_{cm}
0.8	17.4	6.0	2.1～2.9
1.0	27.2	6.0	3.0～8.4
1.0	15.3	8.0	2.5～5.0
1.3	25.9	8.0	2.6～8.5
1.2	14.1	10.0	2.1～4.1
1.4	19.2	10.0	2.1～6.8
1.5	15.3	12.0	1.8～5.1
1.8	22.1	12.0	1.5～7.2
1.7	14.5	14.0	1.4～4.3
2.0	20.0	14.0	1.5～6.9

(2) 実験結果および考察

図-2.3は波速に対する実験結果と第1および第2定義による有限振幅波の理論曲線とを比較したものである。図中の記号S-1, S-4-1, S-4-2, S-5-Deはそれぞれ、微小振幅波理論、第1および第2定義による Stokes 波の第4次近似

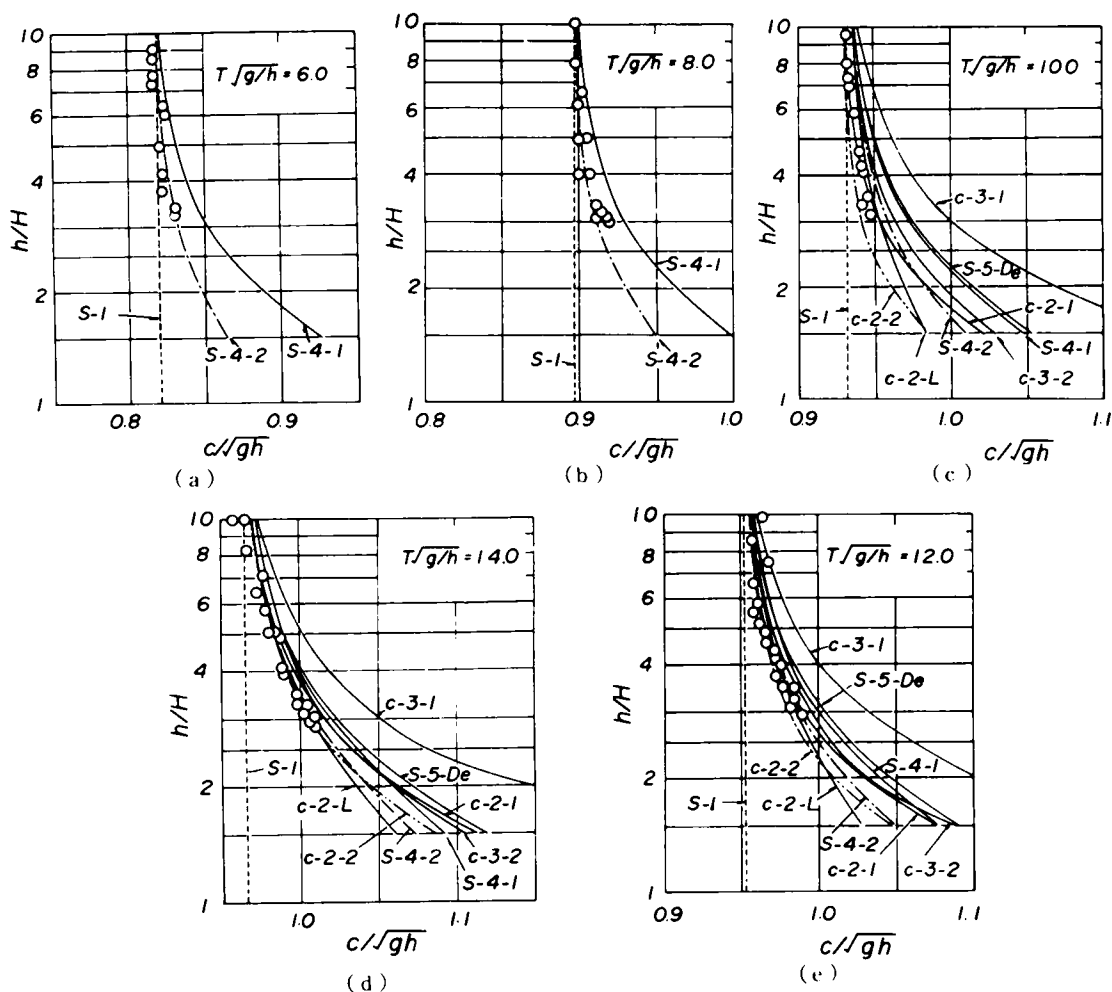


図-2.3 c/\sqrt{gh} の h/H による変化

解および De により第1定義に基づいて計算された Stokes 波の第5次近似解を示し、 $c-2-1$ 、 $c-2-2$ 、 $c-3-1$ および $c-3-2$ は Chappellear および著者によって計算された第1および第2定義によるクノイド波の第2近似解と第3近似解、 $c-2-L$ は平均水深で表わした Laitone によるクノイド波の第2近似解を表わす。また、以下においては、クノイド波理論はその適用限界を考慮して $T\sqrt{g/h} \geq 10$ の場合に限って図示してある。これらの図から、波速の実験結果は、Stokes 波およびクノイド波のいずれについても第1定義による理論曲線よりも第2定義のそれとはるかによく一致しており、とくに $h/H > 2.8$ に対して、 $T\sqrt{g/h} < 12$ では Stokes 波の第4次近似解、また $T\sqrt{g/h} \geq 12$ では Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第2近似解とよく一致していることがわかる。しかし、実験条件が限られているので、理論曲線の差異は小さく、詳細な検討のためには、 h/H のより小さな値の実験結果との比較が必要である。また、同一定義による Stokes 波およびクノイド波理論の値は相互に非常に近いが、第1定義によるクノイド波の第3近似解の理論曲線は、 h/H の値の小さい場合には他の曲線に比べてはるかに大きく、Le Méhauté が指摘したように、計算結果が発散する傾向にある。

2.3.2 波の峯高および水粒子速度の特性

(1) 実験装置および実験方法

実験は京大防災研宇治川水理実験所にある図-2.4に示す長さ78 m、幅1 mおよび深さ1.5 mの一端

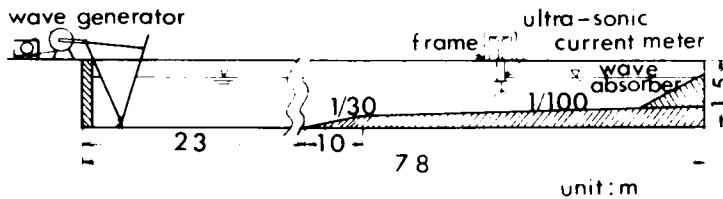


図-2.4 実験装置の概略図

にこう配1/100の斜面をもつコンクリート造長水槽を用いて行なった。実験装置は造波機側の水槽端より約53 mの地点に鋼製のわくを組み、そこにドップラー式超音波流速計をつり下げたものである。実験は、まず周期 T 、水深 h および流速計設置位置 z を一定にして、波高 H を広範囲に変化させて行ない、水平および鉛直水粒子速度を測定した。ついで、波高を一定にして流速計の設置位置を変化させて水粒子速度の鉛直分布を測定した。また、波高の測定は流速計と同じ鉛直平面内に設置した電気抵抗線式波高計で行ない、記録の解析にはできるだけ反射の影響の入らない4~5波を用いた。なお、流速計は3方向成分が検出できるので、水路軸と直角の成分が零になるように設置

た。実験条件および実験波の特性を表-2.3に示す。

図-2.3 実験条件および実験波の特性
(波の峯高および水粒子速度に関する実験の場合)

このドップラー式超音波流速計は発信器より発信された超音波の振動数が水中の浮遊粒子の運動によるドップラー効果のために、ドップラースhiftをうけることを利用して、方向別の水粒子速度を測定しようとするものであり、方向別の水粒子速度成分をそれぞれ別個に連続的に測定することが

周期 T sec	水深 h cm	$T\sqrt{g/h}$	波高 H cm
2.0	55.6	8.40	9.0~39.6
2.5	55.6	10.5	6.2~39.1
3.0	55.6	12.6	6.6~42.2
2.5	27.8	14.8	5.7~19.5
3.0	27.8	17.8	4.7~24.8

ができるという大きな特徴をもっている。一方、欠点としては、水粒子そのものの移動速度を測定するのではなく、水中の泡やゴミなど超音波が散乱する粒子の移動速度を測定することになることや現在のところ周波数変化を平滑化された電圧変化に変換するローパスフィルターの回路特性のために、その応答性に若干の問題を残していることである。

実験に先立ち、流速計を取りつけた台車を静水中において種々の速度で移動させて静的検定を行なったところ、台車の運動速度と流速計の出力電圧との間に良好な直線関係が見出された。また、動的検定は行なわなかったが、ローパスフィルターの臨界周波数特性(10cps)からこの流速計の使用限界の周波数は約2cpsと推定された。

(2) 実験結果および考察

1) 波の峯高：図-2.5は静水面上の波の峯高 η_0 の実験結果と有限振幅波理論の理論曲線とを比較したものであるが、2.2ですでに述べたように、波速の定義は水位変動に対してほとんど影響しないので、同一の近似解に対する理論曲線はほぼ一致している。これらの図によれば、実験結果のばらつきが比較的大きいので、各近似解の優劣は論じがたいけれども、従来指摘されているように、 $T\sqrt{g/h}$

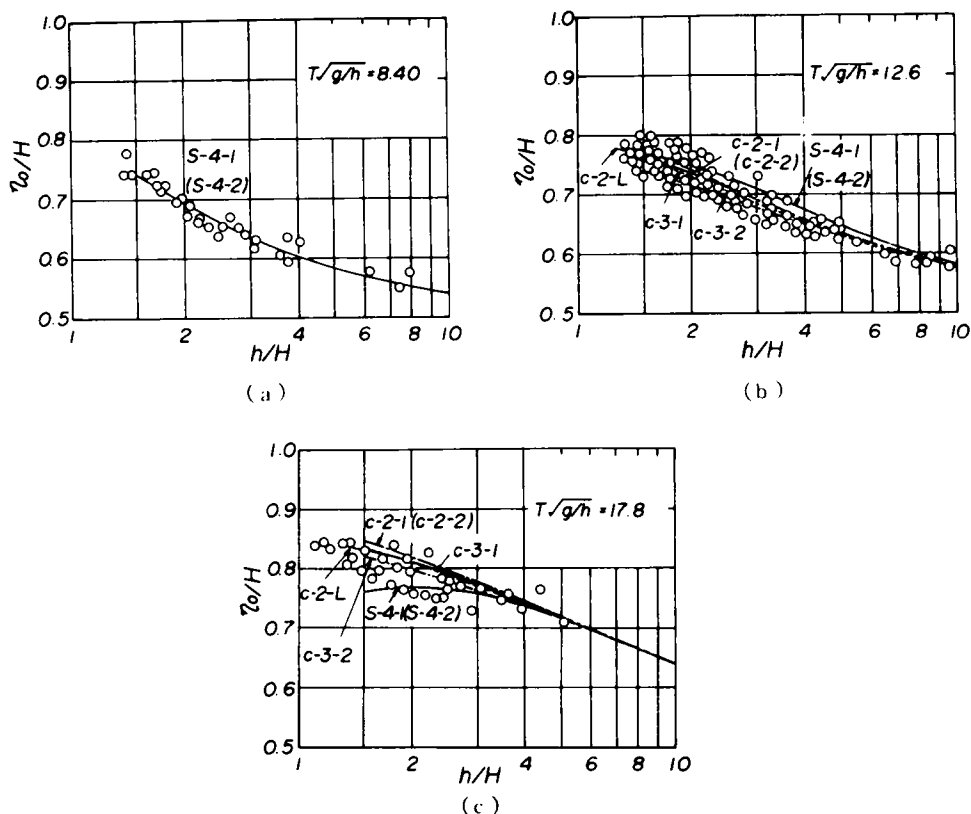


図-2.5 η_0/H の h/H による変化

の値が小さい場合すなわち比水深の値の比較的大きい場合には Stokes 波の第 4 次近似解, $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合すなわち比水深の値の小さい場合にはクノイド波理論の適合性がよくなる傾向がうかがえる。したがって、柱体に作用する全波力を計算する場合、柱体による波の変形や柱体への波のはいあがりの効果を見れば、静水面上の波の案高として、これらの有限振幅波理論によるものが適切といえる。図-2.6 は合田⁽⁴³⁾に従って水底からの波の案高 hc/h と H/h との関係を $T\sqrt{g/h}$ をパラメーターとして示したものであるが、有限振幅波理論が与えるように、 $T\sqrt{g/h}$ の値の大きいほど、 hc/h の値が大きくなる傾向があるけれども、実用的には hc/h は H/h のみの関係で表示される。また、この結果は $H/h < 0.75$ の領域で一様水深および底こう配 1/100 の場合より求められた合田の平均曲線とほぼ一致している。

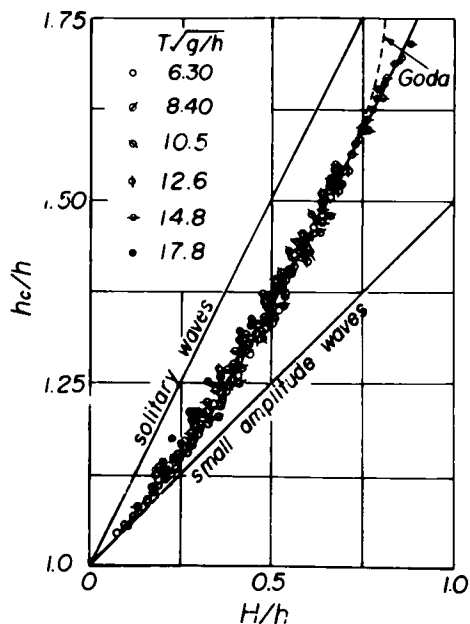
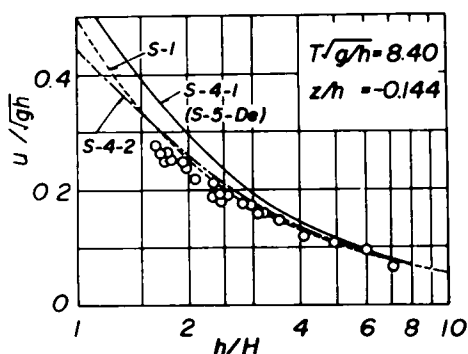
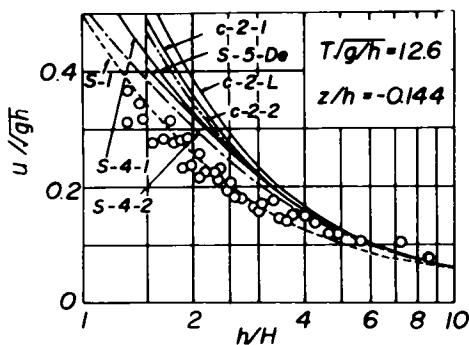


図-2.6 hc/h の H/h による変化

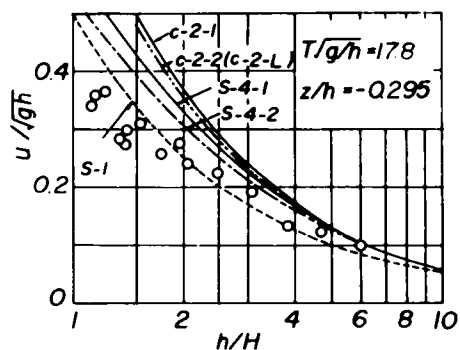
ii) 水粒子速度(1): 図-2.7は波の峯および谷の位相における水中の1点 z での水平水粒子速度に対する実験結果と理論曲線との比較を示したものである。これらによると、用いた流速計の応答特性などのために、波の峯の位相での水粒子速度の実験結果は理論で与えられるほど顕著には h/H の値の減少とともに増加しない。しかし、第2定義による Stokes 波の第4次近似解は波の峯および谷の両方の位相において、第1定義によるものより相対的によい近似を与えるのに対して、クノイド波理論はいずれの定義によるも



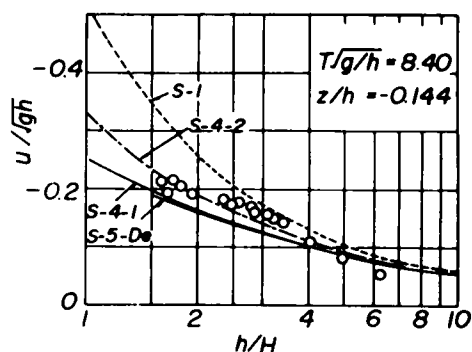
(a)



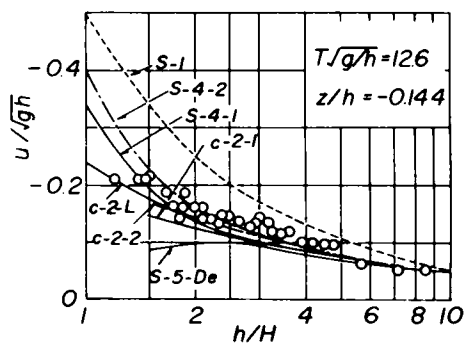
(b)



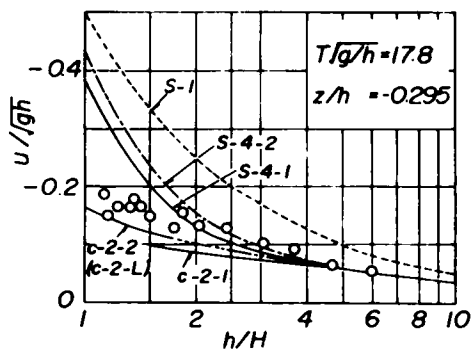
(c)



(d)



(e)



(f)

図-2.7 u/\sqrt{gh} の h/H による変化

のも波の峯の位相では若干大きな値を示すことがわかる。また、図-2.8は鉛直水粒子速度の最大値の h/H による変化を示したものであって、これらの図から明らかなように、鉛直水粒子速度についても、

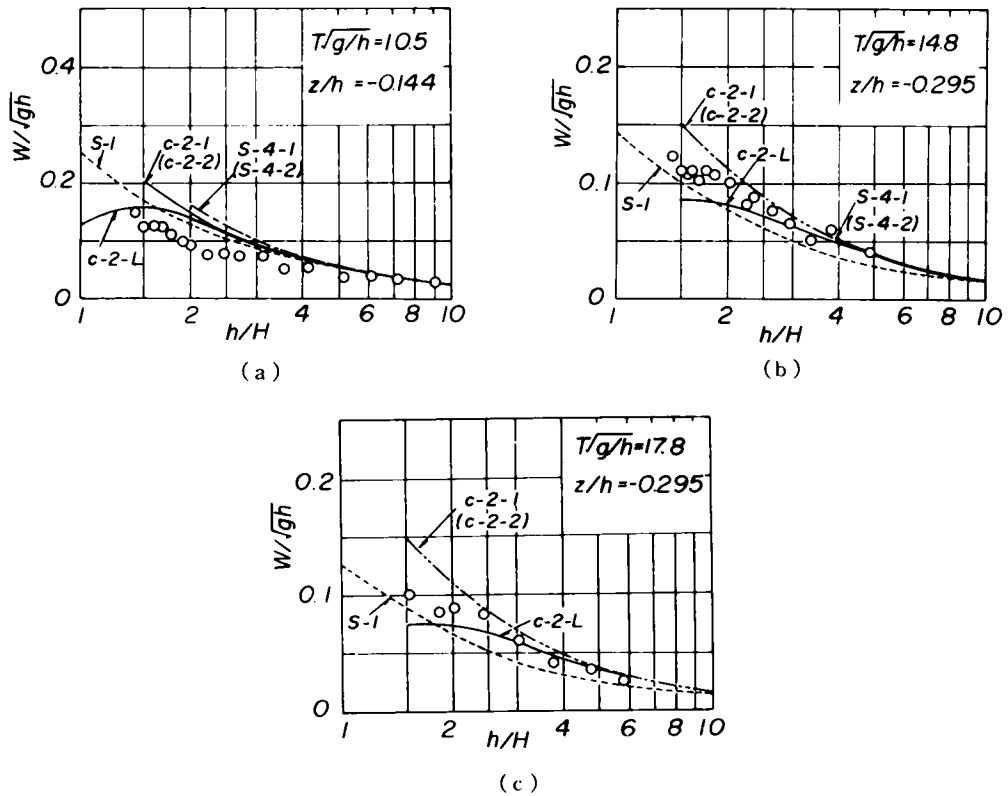
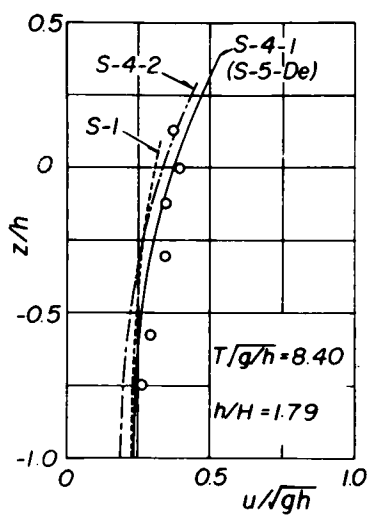
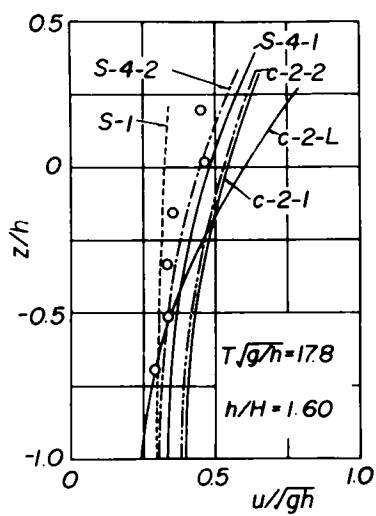


図-2.8 w/\sqrt{gh} の h/H による変化

$T\sqrt{g/h}$ の値の小さい場合には、 h/H の値の大きいときを除き、実験結果は理論曲線より全体的に若干小さくプロットされているが、 $T\sqrt{g/h}$ の値の増加とともに、クノイド波理論と比較的よく一致するようになる。つぎに、波の峯の位相における水平水粒子速度の鉛直分布を示したのが図-2.9であり、 $T\sqrt{g/h}$ の値の小さい場合にはむしろ第1定義による Stokes 波理論との対応がよいが、 $T\sqrt{g/h}$ の値の大きい場合には第2定義による Stokes 波理論に近い。また、クノイド波理論は実験結果より大きな値を与え、とくに、Laitone のクノイド波理論の鉛直分布形状は Stokes 波理論を含めた他の理論曲線と異なり、水面に向かって急増する形を示し、実験結果との対応が悪くなっている。このことは、2.3.4 で明らかにしたように、Laitone の理論では Chappelear の理論における展開パラメーター L_0 および L_3 を H/h の2乗の項までしか考慮していないという影響が h/H の値の小さい場合に顕著になることを示していると思われる。図-2.10は水位変動と水平および鉛直水粒子速度の時間的変化の数例を示したものであって、図中の白丸および黒丸はそれぞれ水平および鉛直水粒子速度の実験結果を表わす。これらの図では、実験結果のばらつきのために、いずれの波速の定義による有限振幅波理論がより適合性をもつかは明確でないが、時間波形

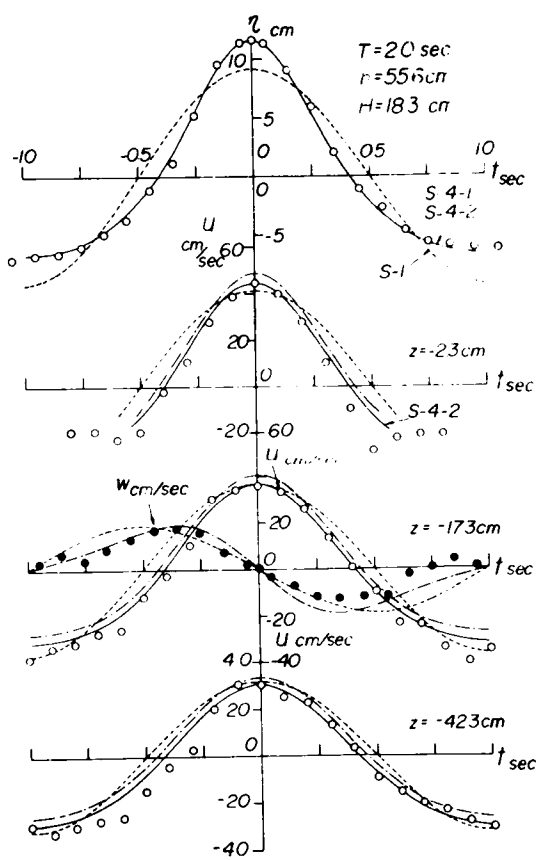


(a)

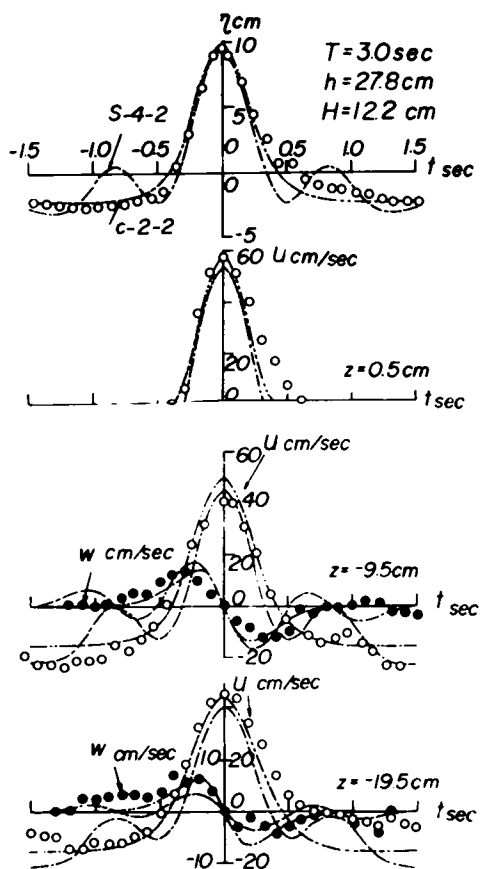


(b)

図-2.9 水平水粒子速度の鉛直分布



(a)



(b)

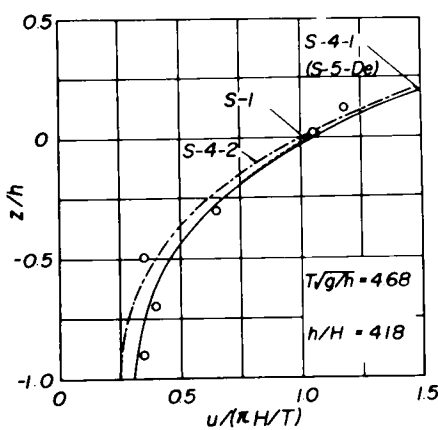
図-2.10 水位変動および水粒子速度の時間的变化

は、 $T\sqrt{g/h}$ の値の小さい場合には Stokes 波理論と比較的よく一致し、また $T\sqrt{g/h}$ の値の大きい場合にはむしろクノイド波理論に近い。

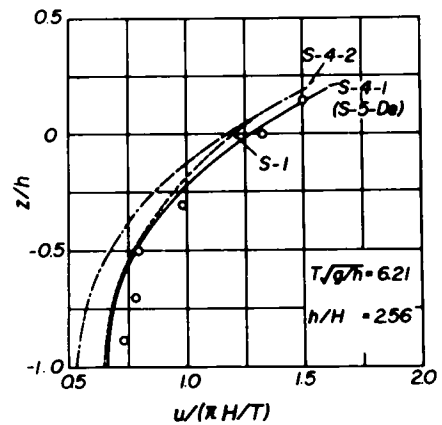
以上の考察からは流速計の動的特性など実験上の問題や実験結果のばらつきに関連して、波速の場合のように、 $T\sqrt{g/h}$ と h/H との関係で明確に表示できないが、 h/H の値があまり小さくない場合には、第2定義による Stokes 波の第4次近似解が比較的よい妥当性を示すことがわかった。

iii) 水粒子速度(2):すでに述べたように、水平水粒子速度の鉛直分布は合田、岩垣らおよび Le Méhautéらによって測定されているので、かれらの実験結果と著者の理論解を含めた各種の理論曲線との比較検討を行なう。

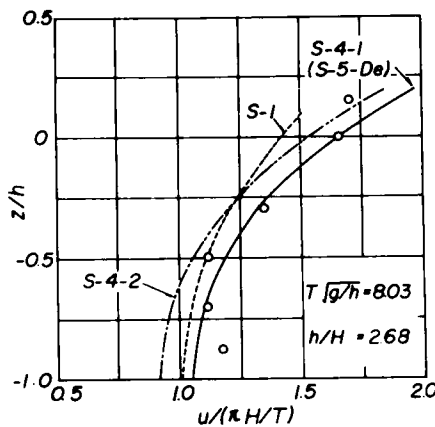
合田は鉛直円柱に作用する波力の大規模な実験を実施した際、波の特性の広い範囲に対して、一様水深および $1/100$ のこう配上において6台のプロペラ式流速計によって波の水平水粒子速度の鉛直分布を測定し、これらの結果から、波の峯および谷の位相における水平水粒子速度を与える半理論式を提案した。図-2.11は波の峯の位相における実験結果と理論曲線との比較を示したものである。合田の実験結果は全体的



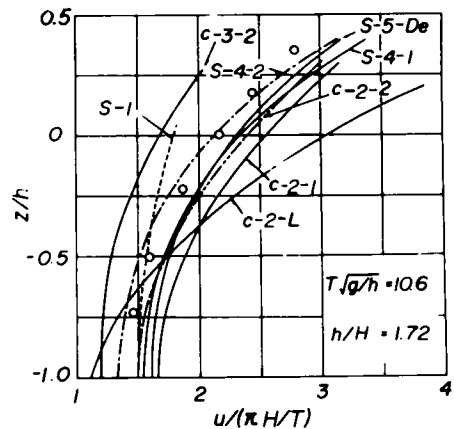
(a)



(b)



(c)



(d)

図-2.11

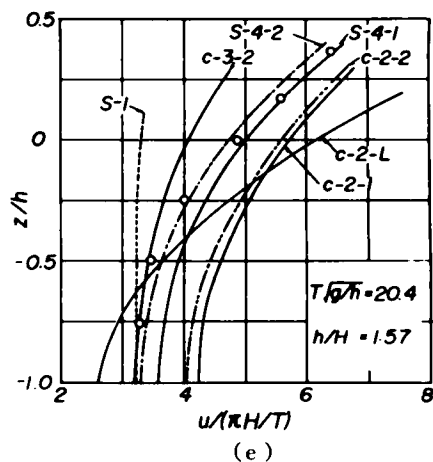
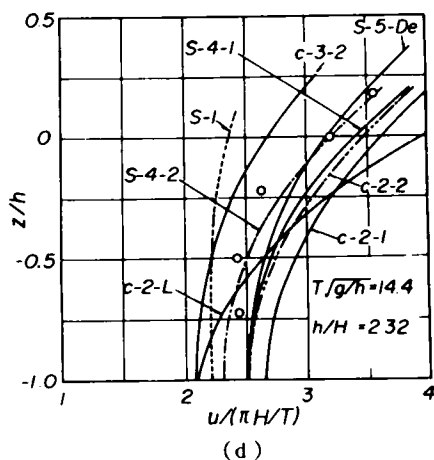


図-2.11 水平水粒子速度の鉛直分布（合田の実験結果）

に Stokes 波理論とよく一致しており、とくに $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合には第2定義による Stokes 波の第4次近似解との対応がよい。一方、この場合でもクノイド波の第2近似解は実験結果に比較してかなり大きく、また第2定義によるクノイド波の第3近似解は過小な値を与える。

図-2.12は、岩垣らがそれほど波高の大きくない波を対象として一様水深上での波の峯付近における水平水粒子速度の鉛直分布を、水素気泡をトレーサーとする方法によって測定した結果の数例を理論曲線と比較したものである。かれらの実験結果は $T\sqrt{g/h}$ の値が小さい場合には Stokes 波理論と、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合には Laitone のクノイド波理論とよい対応を示している。ただし、波速の定義による有限振幅波理論の差異は実験結果のばらつきのために明確でない。

Le Méhauté らが中立浮遊粒子をトレーサーとする方法によって一様水深での波の峯の位相における水

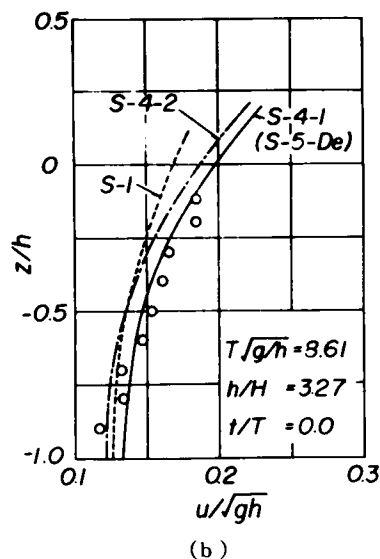
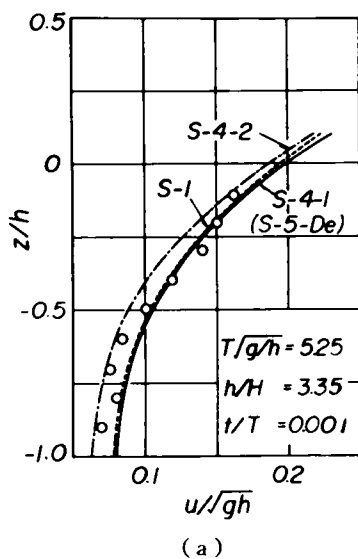


図-2.12

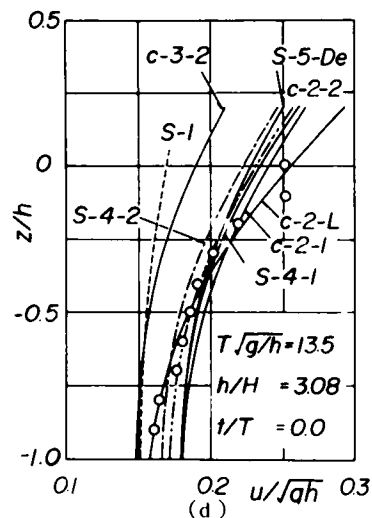
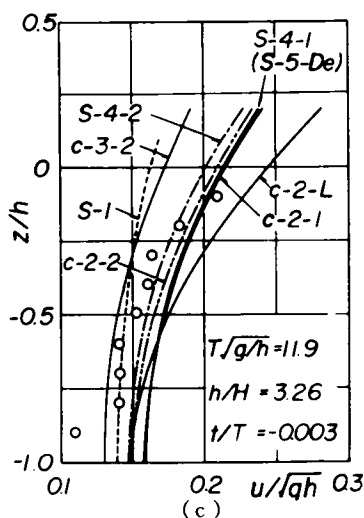


図-2.12 水平水粒子速度の鉛直分布(岩垣らの実験結果)

平水粒子速度の鉛直分布を測定した結果の数例を示したものが図-2.13であって、実験結果はほとんどすべての場合について理論曲線よりかなり小さい。この原因としては、図中の実験結果のばらつきの範囲から考えて、かれらの用いた中立浮遊粒子による方法の精度が必ずしも十分でないことや実験に用いた水槽や実験装置(かれらは水槽が十分な長さをもたないにもかかわらず、浅海域での高波高の波を造波するために、一様な水深部をもつ測定断面より造波機側に、こう配を有し、しかも水路幅が変化する領域を設けた)に問題があるように思われる。

結局、合田および岩垣らの実験結果との比較から、実

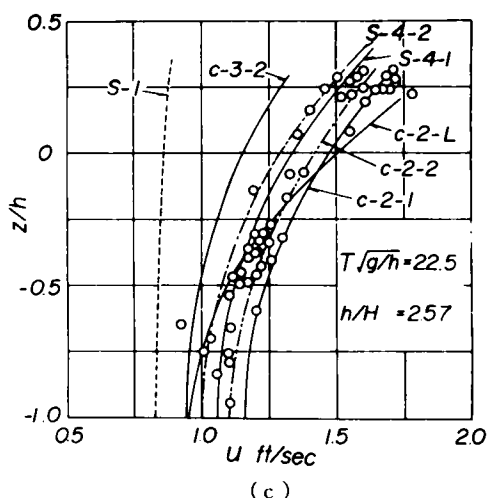
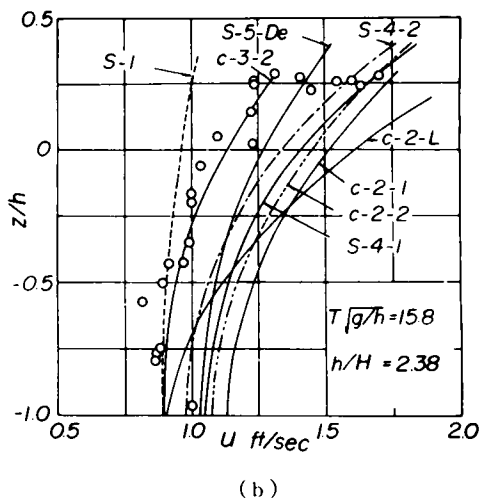
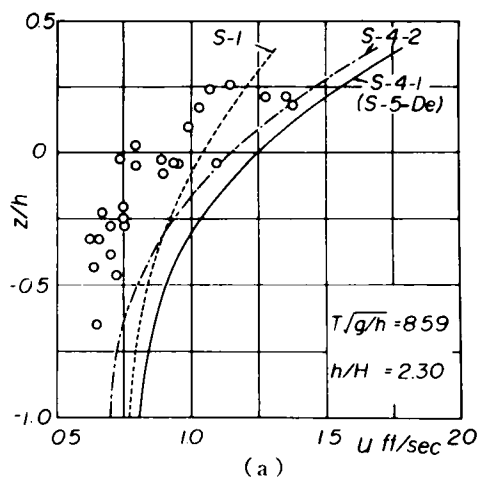


図-2.13 水平水粒子速度の鉛直分布(Le Méhautéらの実験結果)

実験結果のばらつきが大きいために、波速の定義による有限振幅波理論の差異については十分検討できなかったが、実験結果は Stokes 波理論と比較的よく一致し、とくに $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合には第 2 定義による Stokes 波の第 4 次近似解とよく一致することおよびクノイド波の第 3 近似解や Laitone のクノイド波の第 2 近似解は h/H の値が小さい場合には、実験結果とのへだたりが大きいので、クノイド波理論としては第 2 定義による Chappellear のクノイド波の第 2 近似解がより適合性があることが明らかにされた。したがって以下の有限振幅波理論を用いた波力算定式の展開では第 2 定義による Stokes 波の第 4 次近似解および第 2 定義による Chappellear のクノイド波の第 2 近似解を用いることにする。

2.4 有限振幅波理論による波力算定式

柱体に作用する波力の研究の多くは Morison 以来微小振幅波理論を用いて行なわれているので、以下においては、有限振幅波理論を用いた波力算定式を鉛直円柱、鉛直角柱および水平円柱の場合について導くことにする。

2.4.1 波力の表示式

図-2.14 のような座標系を用いると、長さ dz の鉛直柱体に作用する水平波力(以下波力とする)および水底のまわりの波力モーメント dM は、一般にそれぞれ次式で表わされる。

$$dF = \frac{\rho}{2} C_D A u |u| dz + \rho C_M V \frac{du}{dt} dz \quad (2.75)$$

$$\left. \begin{aligned} dM &= \frac{\rho}{2} C_D A u |u| (h+z) dz \\ &+ \rho C_M V \frac{du}{dt} (h+z) dz \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

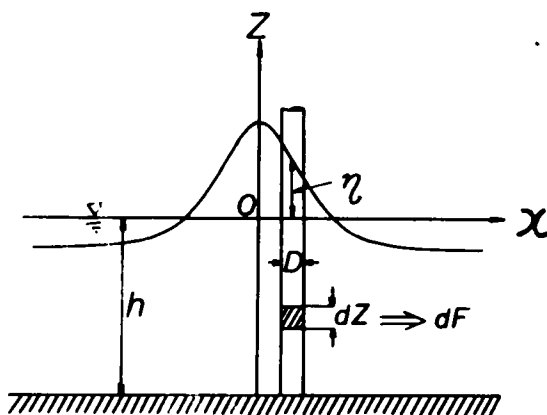


図-2.14 座標系

ここに、 C_D : 抗力係数、 C_M : 質量係数、 ρ : 流体の密度および du/dt : 水平水粒子加速度である。

また A は波の進行方向に直角方向の柱体の単位長さあたりの投影面積、 V は水没した柱体の単位長さあたりの体積をあらわし、鉛直円柱の場合には $A = D$ 、 $V = \pi D^2/4$ 、一辺 D の鉛直四角柱の面を波の進行方向に向けた場合および 45° に向けた場合には、それぞれ $A = D$ 、 $V = D^2$ および $A = \sqrt{2} D$ 、 $V = D^2$ となる。

鉛直柱体に作用する全波力および全波力の水底のまわりのモーメントは、水平水粒子速度および加速度の算定に適切な波動理論を用いて、式(2.75)および(2.76)を水底から水面まで積分すればよい。すなわち、

$$F = \int_h^\eta \frac{\rho}{2} C_D A u |u| dz + \int_h^\eta \rho C_M V \frac{du}{dt} dz \quad (2.77)$$

$$M = \int_h^\eta \frac{\rho}{2} C_D A u |u| (h+z) dz + \int_h^\eta \rho C_M V \frac{du}{dt} (h+z) dz \quad (2.78)$$

なお、微小振幅波理論を用いた場合は、Dean および Harleman⁴⁴⁾によって導かれている。

一方、柱体の軸が波の進行方向と直交するように水中に設置された水平柱体に作用する単位長さあたりの波力は、次式で表わされる。

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\rho}{2} C_D A' u |u| + \rho C_M V' \frac{du}{dt} \quad (2.79)$$

ここに、 ℓ ：水平柱体の長さ、 A' ：水平柱体の波の進行方向に対する単位長さあたりの投影面積および V' ：水平柱体の単位長さあたりの体積である。直径 D の水平円柱の場合には、 $A' = D$ および $V' = \pi D^2/4$ となる。

2.4.2 波力算定式への有限振幅波理論の導入

第2定義による Stokes 波の第4次近似解によれば、 $x=0$ における水平水粒子速度は、式(2.33)を若干変形して、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{c} = & F_0 + F_1 \cosh k(h+z) \cos \sigma t + F_2 \cosh 2k(h+z) \cos 2\sigma t \\ & + F_3 \cosh 3k(h+z) \cos 3\sigma t + F_4 \cosh 4k(h+z) \cos 4\sigma t \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = & \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh} \left[1 + \lambda^2 \left\{ \frac{8 \cosh^4 kh - 8 \cosh^2 kh + 9}{8 \sinh^4 kh} - \frac{\cosh kh}{kh \sinh kh} \right\} \right]} \\ F_0 = & -\lambda^2 \frac{\cosh kh}{2kh \sinh kh} + \lambda^4 \left\{ \frac{4 \cosh^7 kh - 20 \cosh^5 kh + 16 \cosh^3 kh - 9 \cosh kh}{32 kh \sinh^7 kh} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\cosh kh}{2kh \sinh kh} \right)^2 \right\} \\ F_1 = & \frac{\lambda}{\sinh kh} + \lambda^3 \left\{ -\frac{\cosh^2 kh (5 \cosh^2 kh + 1)}{8 \sinh^5 kh} + \frac{\cosh kh}{2kh \sinh^2 kh} \right\} \\ F_2 = & \lambda^2 \frac{3}{4 \sinh^4 kh} + \lambda^4 \frac{192 \cosh^8 kh - 424 \cosh^6 kh - 312 \cosh^4 kh + 480 \cosh^2 kh - 17}{384 \sinh^{10} kh} \\ F_3 = & \lambda^3 \frac{-12 \cosh^2 kh + 39}{64 \sinh^7 kh} \\ F_4 = & \lambda^4 \frac{80 \cosh^6 kh - 816 \cosh^4 kh + 1338 \cosh^2 kh - 197}{384 \sinh^9 kh (6 \cosh^2 kh - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

であり、 $\sigma = 2\pi/T$ ：角振動数を表わす。また、 λ は式(2.34)にすでに与えられているが、記号を統一して再び示せば、次式ようになる。

$$\lambda + \lambda^3 \frac{24 \cosh^6 kh + 3}{64 \sinh^6 kh} = \frac{\pi H}{L} \quad (2.82)$$

水平水粒子加速度は convective term を考慮すれば、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} = & -c\sigma \left[\{ F_1 \cosh k(h+\eta) - F_0 F_1 \cosh k(h+\eta) \right. \\ & - \frac{1}{2} F_1 F_2 \cosh 3k(h+\eta) \} \sin \sigma t + \{ 2F_2 \cosh 2k(h+\eta) \\ & - 2F_0 F_2 \cosh 2k(h+\eta) - \frac{1}{2} F_1^2 + F_1 F_3 \cosh 4k(h+\eta) \} \sin 2\sigma t \\ & + \{ 3F_3 \cosh 3k(h+\eta) - \frac{3}{2} F_1 F_2 \cosh k(h+\eta) \} \sin 3\sigma t \\ & \left. + \{ 4F_4 \cosh 4k(h+\eta) - 2F_1 F_3 \cosh 2k(h+\eta) - F_2^2 \} \sin 4\sigma t \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

つぎに、式(2.77)の第2項で表わされる全慣性力 F_I および慣性力の水底のまわりのモーメント M_I は質量係数が鉛直方向に変化しないと仮定すれば、それぞれ式(2.84)および(2.85)で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F_I = & -\rho C_M V c^2 \left[\{ F_1 \sinh k(h+\eta) - F_0 F_1 \sinh k(h+\eta) \right. \\ & - \frac{1}{6} F_1 F_2 \sinh 3k(h+\eta) \} \sin \sigma t + \{ F_2 \sinh 2k(h+\eta) \\ & - F_0 F_2 \sinh 2k(h+\eta) - \frac{1}{2} F_1^2 k(h+\eta) \\ & - \frac{1}{4} F_1 F_3 \sinh 4k(h+\eta) \} \sin 2\sigma t + \{ F_3 \sinh 3k(h+\eta) \\ & - \frac{3}{2} F_1 F_2 \sinh k(h+\eta) \} \sin 3\sigma t + \{ F_4 \sinh 4k(h+\eta) \\ & \left. - F_1 F_3 \sinh 2k(h+\eta) - F_2^2 k(h+\eta) \} \sin 4\sigma t \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

$$\left. \begin{aligned} M_I = & -\rho C_M V \frac{c^2}{k} \left((F_1 K_1 - F_0 F_1 K_1 - \frac{1}{2} F_1 F_2 K_3) \sin \sigma t + [2F_2 K_2 \right. \\ & - 2F_0 F_2 K_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \{ k(h+\eta) \}^2 + F_1 F_3 K_4] \sin 2\sigma t + (3F_3 K_3 \\ & \left. - \frac{3}{2} F_1 F_2 K_1) \sin 3\sigma t + [4F_4 K_4 - 2F_1 F_3 K_2 - \frac{F_2^2}{2} \{ k(h+\eta) \}^2] \sin 4\sigma t \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} k\eta = & B_1 \cos \sigma t + B_2 \cos 2\sigma t + B_3 \cos 3\sigma t + B_4 \cos 4\sigma t \\ B_1 = & \lambda \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \lambda^2 \frac{\cosh kh (2 \cosh^2 kh + 1)}{4 \sinh^3 kh} \\
&+ \lambda^4 \frac{\cosh kh (272 \cosh^8 kh - 504 \cosh^6 kh - 192 \cosh^4 kh + 322 \cosh^2 kh + 21)}{384 \sinh^9 kh} \\
B_3 &= \lambda^3 \frac{24 \cosh^6 kh + 3}{64 \sinh^6 kh} \\
B_4 &= \lambda^4 \frac{\cosh kh (768 \cosh^{10} kh - 448 \cosh^8 kh - 48 \cosh^6 kh + 48 \cosh^4 kh + 106 \cosh^2 kh - 21)}{384 \sinh^9 kh (6 \cosh^2 kh - 1)} \\
K_n &= \frac{nk(h+\eta) \sinh nk(h+\eta) - \cos nk(h+\eta) + 1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{2.86}$$

である。式 (2.84) および (2.85) 中の $F_m F_n$ (ここに, $m < n$, $m = 0, 1$ および $n = 1, 2, 3$) は水平水粒子加速度における convective term からの寄与を示しており, 計算にあたっては $k\eta$ に関する双曲線関数の展開を行なって λ^4 まで考慮すればよい。

全抗力 F_D および抗力による水底のまわりの波力モーメント M_D は式 (2.84) および (2.85) のような表現はできないが, 抗力係数が鉛直方向に変化しないものと仮定すれば, それぞれ次式を用いて Simpson 則により直接数値積分して算出することができる。

$$F_D = \frac{\rho}{2} C_D A \int_{-h}^{\eta} u |u| dz \tag{2.87}$$

$$M_D = \frac{\rho}{2} C_D A \int_{-h}^{\eta} u |u| (h+z) dz \tag{2.88}$$

結局, 全波力 F および全波力モーメント M はそれぞれ次式で表わされる。すなわち, 全波力は

$$F = F_D + F_I \tag{2.89}$$

となり, 全波力モーメントは

$$M = M_D + M_I \tag{2.90}$$

によって算出されることになる。

また, 第2定義による Chappellear のクノイド波の第2近似解を用いると, 水平水粒子速度および加速度はそれぞれ式 (2.91) および (2.92) で表わされる。

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\sqrt{gh}} &= \left(1 - \frac{E}{K} - \kappa^2 \operatorname{sn}^2 \gamma t \right) \left\{ L_0 + (1 + \kappa^2) L_0^2 + 5 L_0 L_3 \right\} + \left(1 - \frac{E}{K} \right)^2 L_0^2 \\
&- L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^4 \gamma t - \left\{ -\frac{3}{4} L_0^2 \kappa^2 + \frac{3}{2} L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) \operatorname{sn}^2 \gamma t \right. \\
&\left. - \frac{9}{4} L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^4 \gamma t \right\} \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{4K\sqrt{gh}}{T} \operatorname{sn} \gamma t \operatorname{cn} \gamma t \operatorname{dn} \gamma t \left[L_0 \kappa^2 + L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) + 5 L_0 L_3 \kappa^2 \right]$$

$$\left. \begin{aligned}
& + 2L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t + \frac{3}{2} \{ L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^4) - 3L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t \} \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \\
& - \left(\frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left\{ L_0^2 \kappa^2 \left(1 - \frac{E}{K} \right) - L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t \right\} \right\} \quad (2.92)
\end{aligned}$$

したがって、全慣性力および慣性力によるモーメントはそれぞれ次式となる。

$$\left. \begin{aligned}
F_I = & -\rho C_M V \frac{4K\sqrt{gh}}{T} h \left(1 + \frac{\eta}{h} \right) \operatorname{sn} \gamma t \operatorname{cn} \gamma t \operatorname{dn} \gamma t \left[L_0 \kappa^2 + L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) \right. \\
& + 5L_0 L_3 \kappa^2 + 2L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t + \frac{1}{2} \{ L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) - 3L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t \} \\
& \left. \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^2 - \left(\frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \{ L_0^2 \kappa^2 \left(1 - \frac{E}{K} \right) - L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t \} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

$$\left. \begin{aligned}
M_I = & -\rho C_M V \frac{2K\sqrt{gh}}{T} h^2 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^2 \left[L_0 \kappa^2 + L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) + 5L_0 L_3 \kappa^2 \right. \\
& + 2L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t + \frac{3}{4} \{ L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) - 3L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t \} \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^2 \\
& \left. - \left(\frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \{ L_0^2 \kappa^2 \left(1 - \frac{E}{K} \right) - L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^2 \gamma t \} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\eta}{h} = & 2L_3 + L_0 (1 + \kappa^2) - L_0 \kappa^2 \operatorname{sn}^2 \gamma t + L_3^2 + \frac{3}{20} L_0^2 (12 + 23\kappa^2 + 12\kappa^4) \\
& + 6L_0 L_3 (1 + \kappa^2) - \frac{5}{2} L_0^2 \kappa^2 (1 + \kappa^2) \operatorname{sn}^2 \gamma t - 6\kappa^2 L_0 L_3 \operatorname{sn}^2 \gamma t \\
& + \frac{3}{4} L_0^2 \kappa^4 \operatorname{sn}^4 \gamma t \\
\frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 + L_3 + \left(1 - \frac{E}{K} \right) \left\{ L_0 + \left(2 + \kappa^2 - \frac{E}{K} \right) L_0^2 + 5L_0 L_3 \right\} \\
\tau = & \frac{2K}{T}
\end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

である。

また、全抗力および抗力によるモーメントについては Stokes 波の場合と同様、式(2.87)および(2.88)にクノイド波の理論式を代入して、数値積分すれば、求められる。

一方、長さ ℓ の水平円柱に作用する全波力は式(2.79)において u および du/dt として Stokes 波理論の場合、式(2.80)および(2.83)、またクノイド波理論の場合、式(2.91)および(2.92)をそれぞれ用いれば計算される。

2.5 抗力係数および質量係数

Morison の方法によって波力を評価する場合、抗力係数および質量係数の選択はきわめて重要である。ここでは、有限振幅波理論を用いた波力算定式より、これら両係数を決定する方法を述べ、ついで鉛直円

柱、鉛直角柱および水平円柱に作用する全波力の実験結果より算出したそれぞれの柱体に対する両係数と波や柱体の特性との関連を明らかにする。

2.5.1 抗力係数および質量係数の算出方法

式(2.77)に従うかぎり、波の峯の位相において慣性力の全波力に対する寄与がなくなるので、鉛直柱体の抗力係数 C_D は、それが鉛直方向に変化しないものとするれば、波の峯の位相における実測の全波力 F_{η_0} から次式を用いて算出される。

$$C_D = \frac{F_{\eta_0}}{(\rho/2) A \int_{-h}^{\eta_0} u |u| dz} \quad (2.96)$$

また、実測の全波力のモーメントの場合には次式を用いることができる。

$$C_D = \frac{M_{\eta_0}}{(\rho/2) A \int_{-h}^{\eta_0} u |u| (h+z) dz} \quad (2.97)$$

有限振幅波理論では、水位変動と水平水粒子速度との零点が一致せず、しかも水粒子速度のそれは、鉛直方向にも若干変化する。そのために、微小振幅波理論による場合のように、慣性力を全波力から分離することはできない。そこで、抗力係数および質量係数が鉛直座標および位相によって変化しないものとして、式(2.96)による抗力係数と水位変動の零点における諸量を用いれば、質量係数は次式によって算出される。

$$C_M = \frac{F_{\eta=0} - (\rho/2) C_D A \int_{-h}^0 u |u| dz}{\rho V \int_{-h}^0 (du/dt) dz} \quad (2.98)$$

ここに、 $F_{\eta=0}$ ：水位変動の零点における実測の全波力である。また、実測の全波力モーメント $M_{\eta=0}$ による場合には同様に次式を用いることができる。

$$C_M = \frac{M_{\eta=0} - (\rho/2) C_D A \int_{-h}^0 u |u| (h+z) dz}{\rho V \int_{-h}^0 (du/dt) (h+z) dz} \quad (2.99)$$

一方、水平柱体の場合の抗力係数および質量係数は同様にしてそれぞれ式(2.100)および(2.101)で算出されるものとする。

$$C_D = \frac{F_{\eta_0}/\ell}{(\rho/2) A u |u|} \quad (2.100)$$

$$C_M = \frac{F_{\eta=0}/\ell - (\rho/2) C_D A u |u|}{\rho V (du/dt)} \quad (2.101)$$

さて、抗力係数は、一般に Reynolds 数の関数として表わされているが、波動運動のような加速度の存

在する場においては、その影響を考慮する必要がある。そこで、ここではそれに関係する無次元量として Keulegan-Carpenter 数を取りあげることにする。鉛直柱体の場合、水粒子速度としては、抗力係数が水粒子速度の自乗に関する鉛直方向についての平均値であることを考慮して、波の峯の位相における水粒子速度の自乗平均値 $\sqrt{u_c^{2*}}$ を用い、Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数をそれぞれ次式で定義することにする。

$$Re = \frac{\sqrt{u_c^{2*}} D}{\nu} \quad (2.102)$$

$$KC = \frac{\sqrt{u_c^{2*}} T}{D} \quad (2.103)$$

ここに、 ν ：動粘性係数である。また、

$$u_c^{2*} = \frac{\int_{-h}^{\eta_0} u^2 dz}{h + \eta_0} \quad (2.104)$$

であり、第2定義による Stokes 波の第4次近似解によれば、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} u_c^{2*} = c^2 (& F_0^2 + F_1^2 K_{11} + F_2^2 K_{22} + F_3^2 K_{33} + F_4^2 K_{44} + 2F_0 F_1 K_{01} + 2F_0 F_2 K_{02} \\ & + 2F_0 F_3 K_{03} + 2F_0 F_4 K_{04} + 2F_1 F_2 K_{12} + 2F_1 F_3 K_{13} + 2F_1 F_4 K_{14} \\ & + 2F_2 F_3 K_{23} + 2F_2 F_4 K_{24} + 2F_3 F_4 K_{34}) \end{aligned} \quad (2.105)$$

ここに、

$$\begin{aligned} K_{0n} &= \frac{\sinh nk(h + \eta_0)}{nk(h + \eta_0)} \\ K_{nn} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sinh 2nk(h + \eta_0)}{2nk(h + \eta_0)} \right\} \\ K_{mn} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sinh(m+n)k(h + \eta_0)}{(m+n)k(h + \eta_0)} + \frac{\sinh(m-n)k(h + \eta_0)}{(m-n)k(h + \eta_0)} \right\} \end{aligned} \quad (2.106)$$

$m = 1, 2, 3, 4$ および $n = 1, 2, 3, 4$

である。

また、第2定義によるクノイド波の第2近似解によれば、 u_c^{2*} は次式になる。

$$u_c^{2*} = gh \left\{ R^2 + \frac{2}{3} RS \left(1 + \frac{\eta_0}{h} \right)^2 + \frac{S^2}{5} \left(1 + \frac{\eta_0}{h} \right)^4 \right\} \quad (2.107)$$

ここに、

$$R = \left(1 - \frac{E}{K} \right) \left\{ L_0 + (1 + \kappa^2) L_0^2 + 5L_0 L_3 + \left(1 - \frac{E}{K} \right)^2 L_0^3 \right\}$$

$$S = \frac{3}{4} \kappa^2 L_0^2 \quad (2.108)$$

である。

以上の諸式を用いて、実験および観測結果からこれら両係数を推定する場合、具体的には、つぎの諸点に留意することにした。すなわち、鉛直角柱を波の進行方向と 45° の角度をなすように設置した場合には、式 (2.102) および (2.103) の D を $\sqrt{2} D$ に置き換え、また、後述する Wiegel らの観測結果および Ross の実験結果は鉛直円柱の一部に作用する波力を測定したものであるので、 u_c^{2*} の定義式における積分の範囲を円柱の下端から上端までに置き換えて u_c^{2*} を計算することにした。一方、水平円柱の場合には、式 (2.100) および (2.101) の u_c^{2*} の代りに、水平円柱の設置位置における波の峯での水粒子速度の自乗、 $u^2(z)$ を用いた。したがって、この場合の Reynolds 数や Keulegan-Carpenter 数は鉛直柱体の場合のそれと定義が異なるが、実験の範囲内では大部分 $u_c^{2*} \approx u^2(z)$ であるので、両者の比較においてはそれほど問題は無いと考えられる。

2.5.2 抗力係数および質量係数の特性

(1) 実験装置および実験方法

以下に述べる実験は、鉛直円柱（底こう配 $i = 1/100$ および $1/30$ の場合）、鉛直角柱（ $i = 1/100$ の場合）および水平円柱（ $i = 1/100$ の場合）に作用する全波力に関するものであって、用いた水槽はすべて 2.3.2 で述べた水槽と同一のものである。鉛直柱体に作用する全波力の実験装置は、造波機側の水槽端より約 53m の位置に鋼製の枠を組み、そこに波力測定装置ならびに試験柱体を取りつけたものである。この波力測定装置は、下端が自由端である片もちばり構造として、長さ約 50cm の円柱に 120 Ω 、ゲージファクター 2.2 のストレインゲージ 8 枚を図-2.15 に示すように接着し、ブリッジ回路を構成して、波の作用で生じた円柱のひずみ量から全波力のモーメント、全波力および作用点を求めるものである。実験に際しては、10cm のチャンネルで十分剛性をもたせた鋼製の枠に波力測定装置および試験柱体を柱体と底面の距離ができるだけ小さくなるように（5～10mm 程度）ボルト結合して取り付けた。柱体を自由振動させて波力測定系の空中および水中固有振動数を測定した結果、水中固有振動数については 5～6cps であった。ついで、滑車を通じておもりを順次つりさげることにより静的な検定を行ない、ひずみ量と外力の関係を求めた。実験は周期 T および水深 h を一定にして砕波にいたるまで波高 H を広範囲に変化させて行ない、柱体に作用する全波力と柱体の設置位置での波高を測定した。鉛直円柱および鉛直角柱の場合の実験条件および実験波の特性は、それぞれ表-2.4 および 2.5 に示すとおりである。なお、実験に使用した鉛直円柱はアルミ

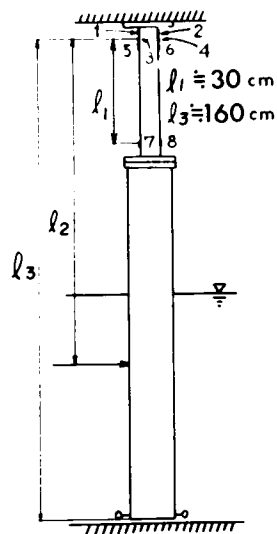


図-2.15 波力測定装置
(鉛直柱体の場合)

ニウム製で、直径7cm、14cm、21cmおよび28cmの4種類である。

表-2.4 実験条件および実験波の特性
(鉛直円柱で $i=1/100$ の場合)

周期 T sec	水深 h cm	$T\sqrt{g/h}$	円柱の直径 D cm	波高 H cm
1.5	55.6	6.30	14.0	9.3~37.5
1.5	55.6	6.30	28.0	12.4~34.2
2.0	55.6	8.40	14.0	7.8~40.9
2.0	55.6	8.40	21.0	6.6~33.4
2.0	55.6	8.40	28.0	6.9~40.7
2.5	55.6	10.5	14.0	5.4~43.2
2.5	55.6	10.5	21.0	5.6~36.6
2.5	55.6	10.5	28.0	7.7~47.6
3.0	55.6	12.6	7.0	4.9~44.2
3.0	55.6	12.6	14.0	4.7~44.0
3.0	55.6	12.6	21.0	4.5~37.4
3.0	55.6	12.6	28.0	4.7~46.9
2.5	27.8	14.8	7.0	5.3~23.6
2.5	27.8	14.8	14.0	4.9~23.6
3.0	27.8	17.8	7.0	4.2~21.2
2.6	41.7	12.6	7.0	5.5~31.6
1.8	14.0	12.6	7.0	5.0~12.7

表-2.5 実験条件および実験波の特性
(鉛直角柱で $i=1/100$ の場合)

周期 T sec	水深 h cm	$T\sqrt{g/h}$	鉛直角柱の辺長 D cm	鉛直角柱の向き θ°	波高 H cm
2.0	55.6	8.40	7.0	0	6.3~35.5
2.0	55.6	8.40	7.0	45	5.8~35.7
2.0	55.6	8.40	14.0	0	7.6~36.9
2.0	55.6	8.40	14.0	45	8.2~42.8
3.0	55.6	12.6	7.0	0	6.5~31.0
3.0	55.6	12.6	7.0	45	7.1~31.9
3.0	55.6	12.6	14.0	0	4.0~37.6
3.0	55.6	12.6	14.0	45	7.2~33.6

鉛直角柱に作用する全波力を評価する場合、波の進行方向に対する鉛直角柱の設置角度 θ が重要な要素であるが、図-2.16に示すように、一様流中における鉛直角柱や H 型断面柱体に作用する抗力^{(45), (46)}が $\theta=45^\circ$ で最大になることを考慮し、また全波力に及ぼす設置角度の効果を検討する意味から、鉛直角柱の実験は1辺7cmおよび14cmの正四角柱の面を波の進行方向に向けた場合 ($\theta=0^\circ$) と 45° に向けた場合 ($\theta=45^\circ$) について実施した。

さらに、底こう配 $i=1/30$ の場合の鉛直円柱に作用する波力の実験も表-2.6に示すように、 $i=1/100$ の

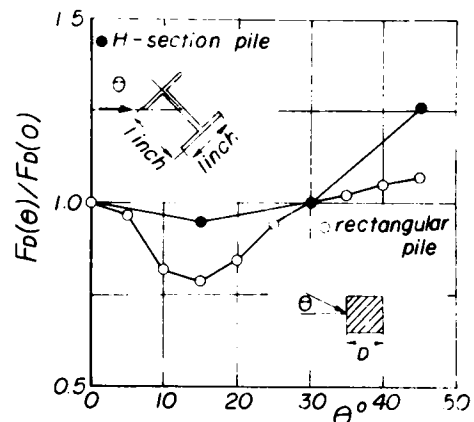


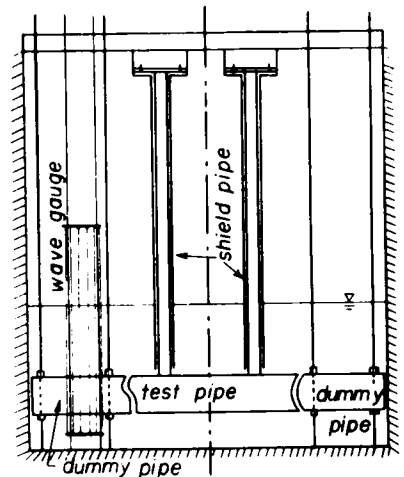
図-2.16 抗力に及ぼす鉛直角柱および H 型断面柱体の設置角度の影響 (一様流の場合)

場合とほぼ同様の条件のもとで行ない、実験装置および実験方法は同一であるので、その説明は省略する。

表－2.6 実験条件および実験波の特性
(鉛直円柱で $i = 1/30$ の場合)

周期 T sec	水深 h cm	$T\sqrt{g/h}$	円柱の直径 D cm	波高 H cm
1.5	55.6	6.30	14.0	9.4～35.4
1.5	55.6	6.30	28.0	9.9～33.7
2.0	55.6	8.30	7.0	9.1～30.6
2.0	55.6	8.40	14.0	6.3～40.7
2.0	55.6	8.40	21.0	9.4～41.3
2.5	55.6	10.5	7.0	7.2～35.9
2.5	55.6	10.5	14.0	4.7～41.5
2.5	55.6	10.5	21.0	6.5～38.1
2.5	55.6	10.5	28.0	6.3～36.7
3.0	55.6	12.6	7.0	4.6～33.9
3.0	55.6	12.6	14.0	8.1～38.5
3.0	55.6	12.6	21.0	5.1～39.4
3.0	55.6	12.6	28.0	5.1～42.0
2.6	41.7	12.6	7.0	5.2～31.8
2.5	27.8	14.8	7.0	5.4～25.6
2.5	27.8	14.8	14.0	5.2～21.5
3.0	27.8	17.8	7.0	4.6～21.1
3.0	27.8	17.8	14.0	4.9～21.9

一方、水平円柱の場合の波力測定装置を示したのが図－2.17である。波力測定の方法は鉛直柱体の場合と全く同じであって、水平円柱を支える2本の支柱の表面にそれぞれ4枚のストレインゲージを接着し、ブリッジ回路を構成したものである。実験に使用した円柱は直径7cmおよび14cm、長さ50cmの鋼管であり、円柱端部の影響を除くために、円柱端部と5mm程度離して同一径の円柱を2本ダミー円柱として設置した。また、試験円柱を固定する支柱は、波力が作用しないように薄肉鋼管でシールドした。実験に際しては、それぞれの円柱に対して、周期、波高および水深のほか円柱の設置位置も変化した。実験条件および実験波の特性は表－2.7に示されている。



図－2.17 波力測定装置
(水平円柱の場合)

以上が著者の実験装置および実験方法に関する説明であるが、以下では鉛直円柱に作用する波力に関する従来の実験および観測結果についても考察するので、表－2.8にこれらの概要の一括表を示してある。

表-2.7 実験条件および実験波の特性
(水平円柱で $i = 1/100$ の場合)

周期 T sec	水深 h cm	$T\sqrt{g/h}$	円柱の設置位置 z cm	円柱の直径 D cm	波高 H cm
1.5	55.6	6.30	-- 30.6	14.0	9.7~31.0
2.0	55.6	8.40	-- 30.6	7.0	7.4~35.4
2.0	55.6	8.40	-- 30.6	14.0	7.0~39.0
2.5	55.6	10.5	-- 30.6	7.0	5.6~34.5
2.5	55.6	10.5	-- 30.6	14.0	5.5~47.4
3.0	55.6	12.6	-- 30.6	7.0	4.3~37.2
3.0	55.6	12.6	-- 15.6	14.0	4.7~33.6
3.0	55.6	12.6	-- 30.6	14.0	8.4~30.8
3.0	55.6	12.6	-- 43.1	14.0	4.5~35.1
2.1	27.8	12.6	-- 15.3	7.0	5.6~19.6
2.1	27.8	12.6	-- 15.3	14.0	7.0~20.5
2.6	41.7	12.6	-- 23.0	7.0	5.3~31.0
2.6	41.7	12.6	-- 23.0	14.0	8.4~30.8
2.5	27.8	14.8	-- 7.8	7.0	5.7~23.2
2.5	27.8	14.8	-- 15.3	7.0	5.0~24.5
2.5	27.8	14.8	-- 22.2	7.0	5.2~23.6
2.5	27.8	14.8	-- 15.3	14.0	5.0~16.6
3.0	27.8	17.8	-- 15.3	7.0	4.8~21.7
3.0	27.8	17.8	-- 15.3	14.0	4.4~22.6

表-2.8 鉛直円柱に作用する波力に関する従来の実験および観測の概要

発 表 者	発表年	周期 T sec	水深 h cm	波高 H cm	円柱の直径 D cm	Reynolds数 [*] $Re \times 10^{-4}$	測 定 条 件
Morison et al.	1953	4.2 ~ 13.3	91.4 ~ 160.6	18.3 ~ 110.0	8.9	2.72 ~ 20.4	観測
Harleman et al.	1955	1.0 ~ 1.49	30.5 ~ 124.1	12.2 ~ 25.6	1.27 ~ 15.2	0.48 ~ 8.1	実験
Wiegel et al.	1957	9.1 ~ 18.6	1400.0 ~ 1500.0	134.2 ~ 625.0	31.4 , 61.0	19.0 ~ 130.0	観測
Ross	1959	3.75 ~ 16.0	153.0 ~ 458.0	58.0 ~ 235.0	32.4	21.0 ~ 86.0	実験
合田	1964	1.37 ~ 7.96	100.0 , 130.0	9.3 ~ 80.1	7.6 , 14.0	1.43 ~ 21.8	実験
Jen	1967	0.91 ~ 5.30	91.4	2.1 ~ 18.3	15.2	0.38 ~ 5.7	実験
Burton et al.**	1970	0.81 ~ 1.67	61.0	1.0 ~ 25.4	9.4 ~ 10.2	0.67 ~ 5.1	実験

備考

* 第2定義による Stokes 波の第4次近似解を用いて計算した。

** 全波力に及ぼす円柱表面の粗度の影響を調べたものであるが、計算に用いた円柱の直径は、円柱の直径に粗度の大きさの2倍を加算したものである。

(2) 抗力係数および質量係数に関する考察

1) 抗力係数

a. 鉛直円柱の場合：図-2.18はそれぞれ第2定義による Stokes 波の第4次近似解および第2定義による Chappellear のクノイド波の第2近似解を用い、式(2.96)あるいは式(2.97)によって算出した

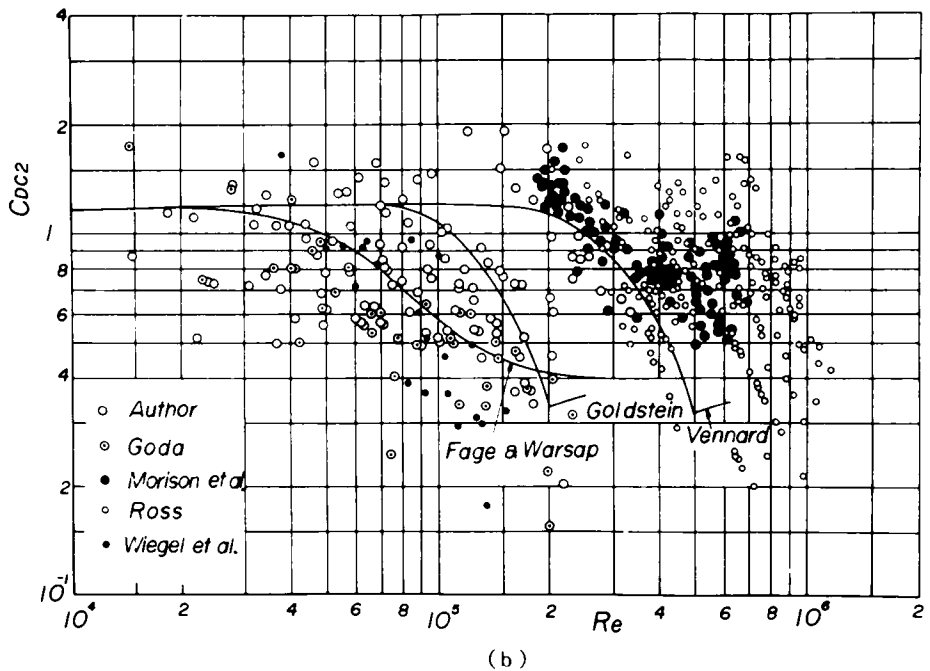
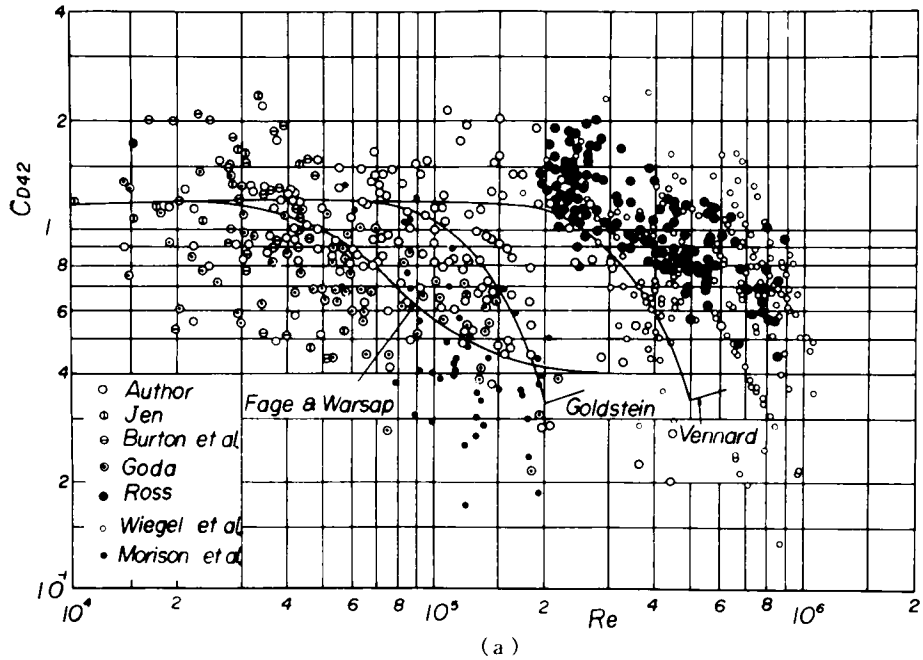


図-2.18 抗力係数の Reynolds 数による変化(1) (鉛直円柱の場合)

鉛直円柱の抗力係数 C_{D42} および C_{Dc2} の Reynolds 数による変化を示したものである。図中には、著者、合田、Burton、Jen および Ross らの実験結果のほか、Morison らおよび Wiegel らの現地観測結果も同時に図示されている。これらの結果のうち、Ross および Morison によるものは、波力の最大値が与えられているだけであるが、波および円柱の特性から抗力が卓越していると考えられるので、その最大値を波の峯の位相における抗力とみなして抗力係数を計算した。したがって、円柱の径の小さい Morison らの観測結果についてはあまり問題がないのに対して、比較的径の大きい Ross の実験結果から計算された抗力係数は実際の値より過大に評価されている傾向がある。また、解析精度の点から考えて、著者ら、Jen および Burton らの実験結果では全抗力が全波力の最大値の約 15 % 以上のものを選んで図示してある。さらに、図中の曲線は、それぞれ合田、Harleman らおよび Wilson らによって用いられた Fage および Warsap、Goldstein (NPL 曲線) および Vennard による一様流中における円柱の抗力係数の実験曲線である。一様流中における抗力係数は、 $Re \approx 10^5$ の臨界 Reynolds 数付近では、実験に用いた風洞の乱れ特性に応じて変化し、とくに Fage および Warsap の実験曲線は乱れの強さが大きいので、他の曲線に比べて Reynolds 数に対して緩やかな変化を示す。これらの図によれば、クノイド波理論は水深・波高比が小さい場合、水粒子速度を過大に評価するので、抗力係数の変動幅が Stokes 波理論の場合に比較して大きくなっているが、いずれの理論による抗力係数も、Reynolds 数との関連において見かけ上 2 つの傾向が現われている。すなわち、Stokes 波理論による結果では、 $Re < 2 \times 10^5$ の領域で平均的に Fage および Warsap による一様流中の実験曲線に近く、Reynolds 数とともに減少する傾向がある。とくに、合田は水粒子速度の実測結果を用いて抗力係数を算出しているが、著者らの計算方法による値とそれほど大きな差はない。

一方、 $Re > 10^5$ の領域でも著者らや Ross の実験結果のように、前述の場合と同様な傾向があり、同一の Reynolds 数に対して抗力係数はかなり異なった値を示す。この抗力係数の傾向はもちろん実験誤差や解析誤差によるばらつきにも起因しているが、そのほか波動運動による円柱の抗力係数が Reynolds 数だけでなく、他の無次元量にも関係することを示している。

図-2.19 はそれぞれ第 1 定義による Stokes 波の第 4 次近似解および微小振幅波理論を用いた抗力係数 C_{D41} および C_{D1} と Reynolds 数との関係を示すものである。 C_{D41} は前述の C_{D42} より若干小さくなる程度であって、Reynolds 数による変化特性はほとんど変らない。しかし、微小振幅波による抗力係数は、静水面上の波の峯高および水粒子速度が過小に評価されているので、他の理論によるものより個々の値や変動幅が大きい。

図-2.20 および 2.21 は Reynolds 数のほかに、波動運動の非定常性を考慮するため、図-2.18 および 2.19 に示した Reynolds 数の領域を数区間に分割し、さらに分割された Reynolds 数の各区間の抗力係数の実験結果を Keulegan-Carpenter 数の 4 つの領域に分類して、それらの平均値から求めた平均曲線を示したものである。これらの図から明らかなように、 $Re < 6 \times 10^4$ の領域では、抗力係数は Keulegan-Carpenter 数によって、それほど変化しないが、 $Re > 6 \times 10^4$ の領域では、同一の Reynolds 数に対して、Keulegan-Carpenter 数が大きいほど、抗力係数は小さくなり、その変化も著しい。Keulegan および Carpenter や Bidde によれば、Keulegan-Carpenter 数は円柱周辺におけるうずの発生発散過程と密

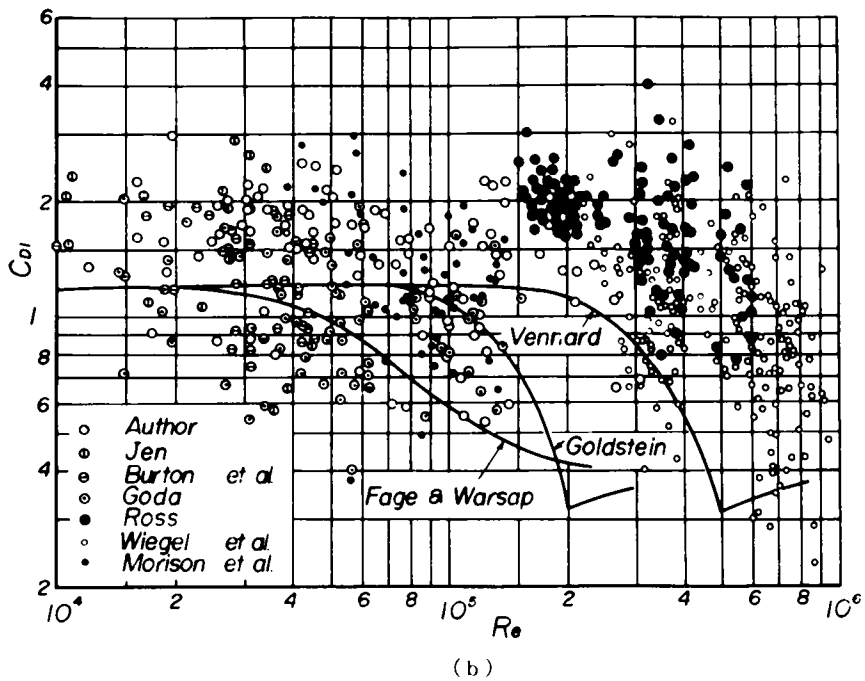
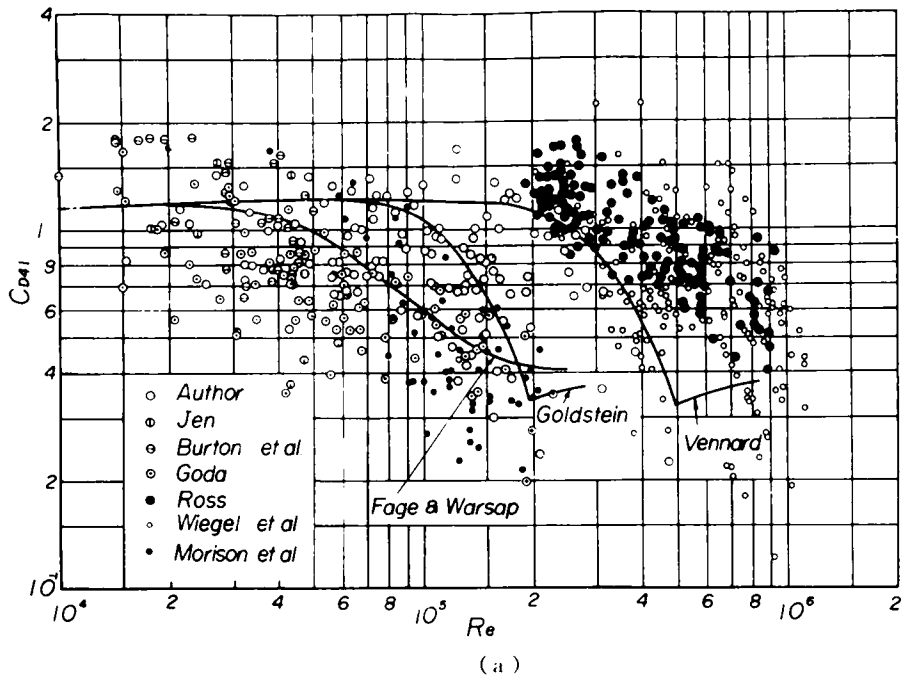
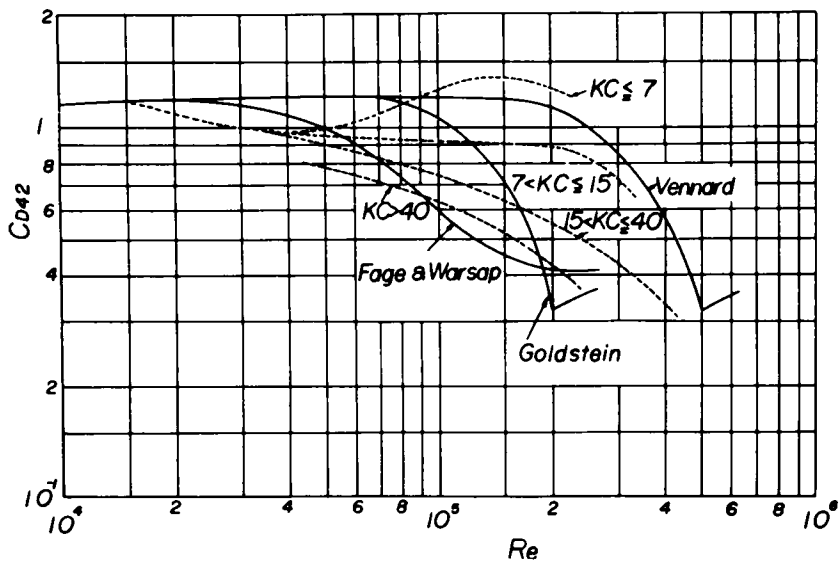
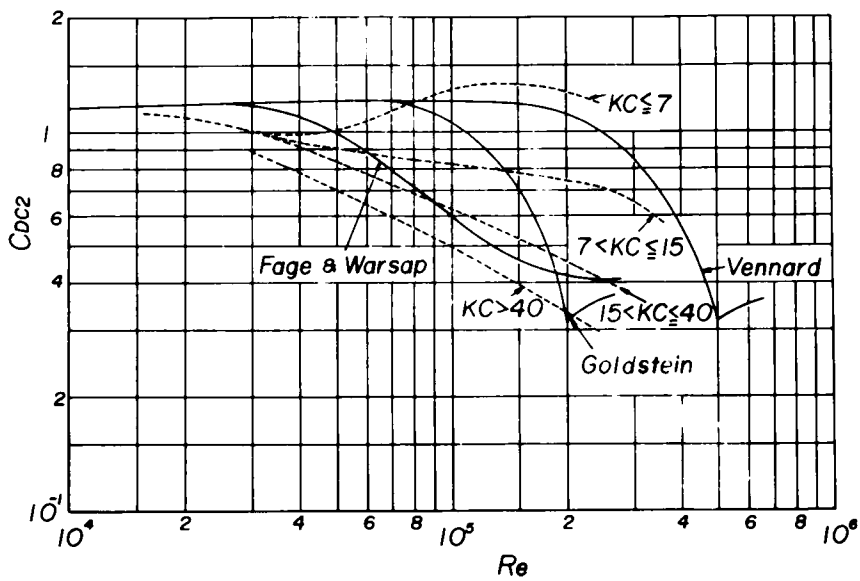


図-2.19 抗力係数の Reynolds 数による変化(2)(鉛直円柱の場合)

接な関連があることが示されている。これらの研究を参考にすると、Keulegan-Carpenter 数が小さいときには、うずの発散が若干ある程度で、波動運動の場合はそれほど乱されておらず、抗力係数は乱れの強



(a)



(b)

図-2.20 抗力係数の Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数による変化 (1) (鉛直円柱の場合)

さの小さい一様流の場合の値、すなわち Vennard による抗力係数の実験曲線との対応が比較的よい。一方、Keulegan-Carpenter 数が大きくなるにつれて、抗力係数は流体運動の場の乱れの強さが大きい場合の Fage および Warsap の実験曲線にむしろ近づくと考えられる。

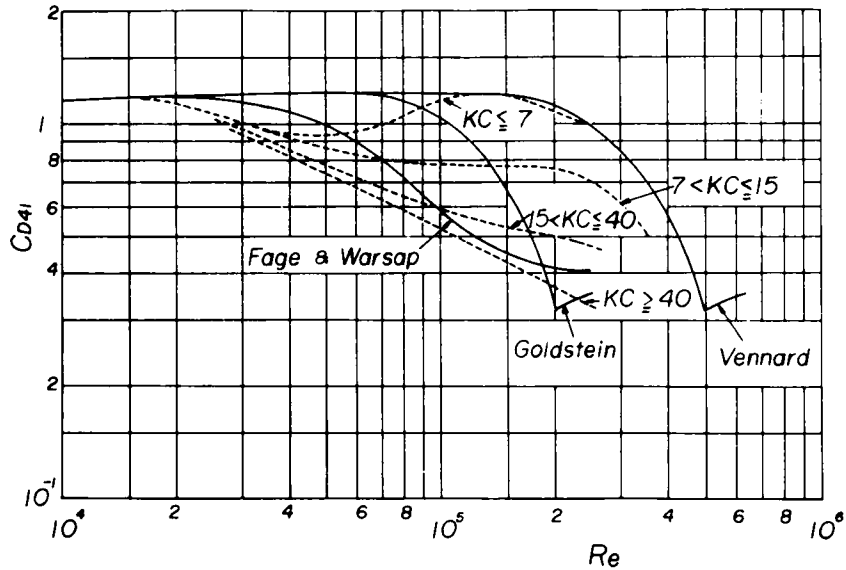


図-2.21 抗力係数の Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数による変化 (2) (鉛直円柱の場合)

b. 鉛直角柱の場合：図-2.22 は第2定義に基づく Stokes 波の第4次近似解によって算出した鉛直角柱の抗力係数と Reynolds 数との関係を示したものであって、(a)および(b)はそれぞれ $\theta = 0^\circ$ および 45° の場合である。また図中の実線は一樣流の場合の抗力係数であり、点線は波による場合の抗力係数を図-2.20 および 2.21 と同様に、Keulegan-Carpenter 数によって分類して平均化したものである。Hoerner⁴⁷⁾によれば、一樣流中における正四角柱の抗力係数は、 $\theta = 0^\circ$ および 45° の場合、Reynolds 数が $10^4 < Re < 10^6$ の領域で、それぞれ $C_D = 2.05$ および 1.55 である。一方、これらの図によれば、資料の数が少なく、また比較すべき従来の資料も全くないので、必ずしも明確でないが、両者の場合とも Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数が大きいときほど抗力係数の値が小さくなる傾向があることおよび抗力係数の Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数に対する挙動はそれぞれの場合若干異なる。

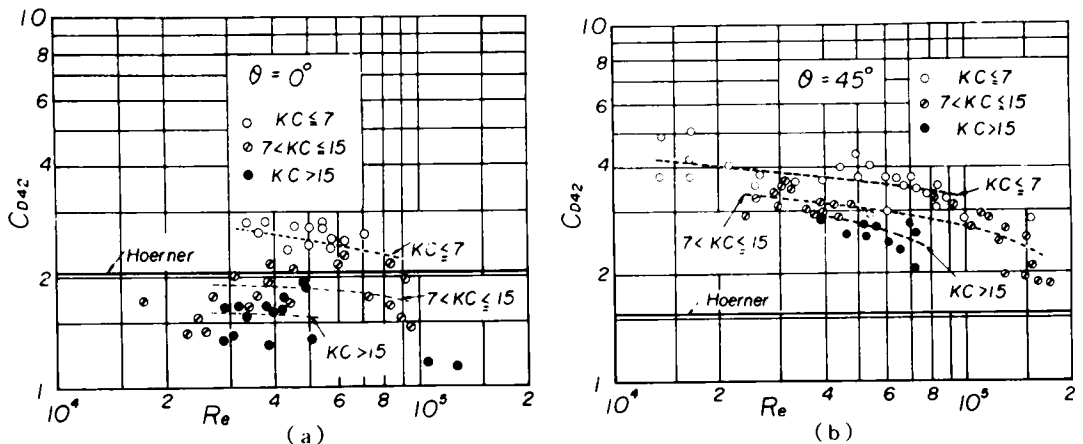


図-2.22 抗力係数の Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数による変化 (鉛直角柱の場合)

つてることがわかる。すなわち $\theta = 0^\circ$ の場合 $KC \leq 7$ の領域では一様流中の抗力係数 $C_D = 2.05$ より若干大きく、 $KC > 7$ では 2.05 よりむしろ小さくなる傾向があるのに対して、 $\theta = 45^\circ$ の場合には全体的に一様流中の抗力係数 $C_D = 1.55$ より大きく、Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数の増加とともに $C_D = 1.55$ に漸近する傾向がある。

この傾向の相違の原因は、つぎのように考えられる。Maschら⁴⁸⁾は、直線的な流速分布をもつ開水路流れでの円柱の抗力係数が流速のこう配によって生じた圧力こう配に起因する2次流すなわち円柱前面でのよどみ線における下降流および円柱後面での後流の中の上昇流のために変化し、底面では増大し、水面に近づくにつれて減少することを示している。波動運動の場合にも同様の機構が考えられるが、鉛直水粒子速度の存在とあいまって、波動運動中での物体の抗力係数は鉛直方向に変化し、水底に近づくほど増加するものと思われる。この柱体前面および後面での2次流は鉛直円柱や $\theta = 45^\circ$ の鉛直角柱に比べて $\theta = 0^\circ$ の鉛直角柱の場合により発達すると考えられるので、抗力係数の変化の割合も大きいといえる。ところで、式(2.96)で定義した抗力係数は水粒子速度の2乗に関する水底から水面までの平均の抗力係数であるので、水粒子速度が鉛直方向に増大し、抗力係数が減少する場合には式(2.96)による抗力係数は水底から水面までの平均の抗力係数に比べて小さく評価されることになる。しかもその割合は、抗力係数および水粒子速度の鉛直方向に関するこう配の大きいときほど大きい。したがって、上述の原因により $\theta = 0^\circ$ および 45° の場合の鉛直角柱の抗力係数の特性に前述の傾向の相違が生じたものと思われる。

c. 水平円柱の場合：図-2.23は式(2.100)に第2定義による Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第2近似解を適用して水平円柱に作用する全波力の実験結果から推定した抗力係数と Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数との関係を示したものである。すでに述べたように、クノイド波理論に

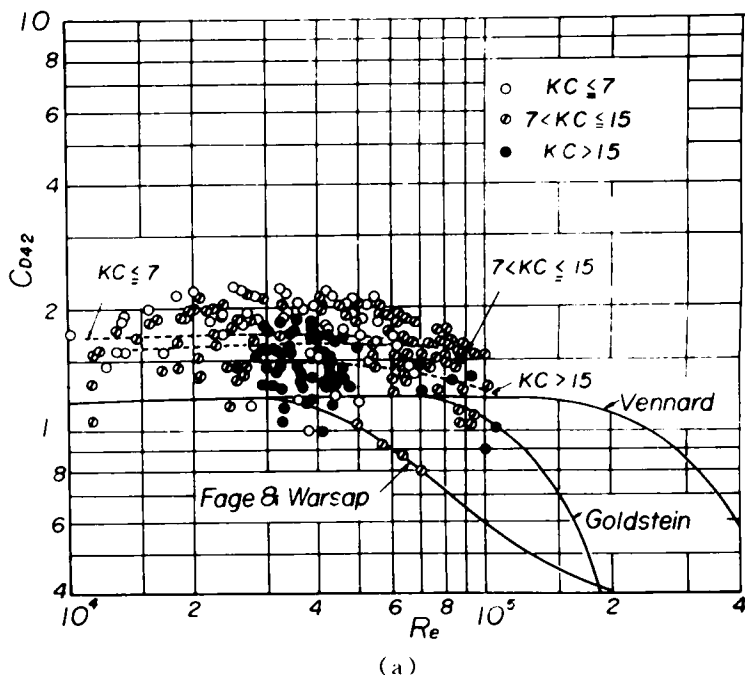


図-2.23

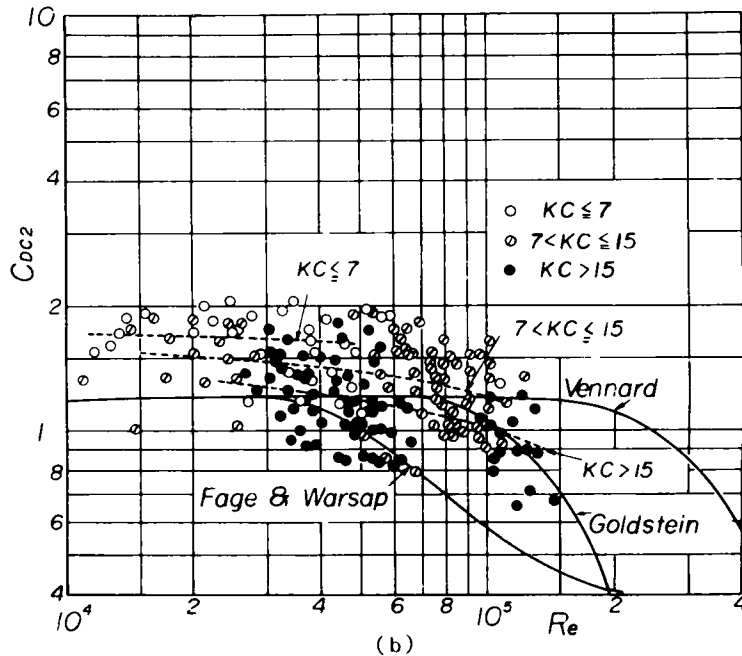


図-2.23 抗力係数の Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数による変化(1) (水平円柱の場合)

よる水粒子速度は実測結果より若干大きくなるので、抗力係数は Stokes 波理論による結果に比べてその値が小さく、しかも変動幅が大きくなっているが、いずれの理論による抗力係数も Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数の増加とともに若干減少する傾向がある。また、その値は重複波の節に設置された水平円柱の波力に関する Keulegan および Carpenter の実験結果⁴⁹⁾のうち、本実験の Keulegan-Carpenter 数と同様な範囲に対する平均値と比較的よく対応している。しかしながら、一様流中の円柱の抗力係数の値や波による鉛直円柱のそれより平均的に約 40 % 程度も大きい。この原因としては、実験および解析に伴う誤差もあるが、主として、底面の影響、鉛直水粒子速度に伴う揚力が水平波力に加算されていること、鉛直円柱の場合に述べた水粒子速度のこう配による抗力係数の鉛直方向変化の影響さらに水面の影響など考えられる。これらのうち水面の影響を評価することは困難であるので、前述の 3 つについてその影響を推定してみよう。

図-2.24 は 1 つの原因と考えられる底面の影響すなわち proximity effect を検討するために、水平円柱の抗力係数 C_{D42} の底面と円柱の間隔 δ と円柱の直径 D との比 δ/D による変化を Keulegan-Carpenter 数をパラメーターにして示したものである。図中の同一の δ/D の値に対する個々の実験結果は同じ直線上に表

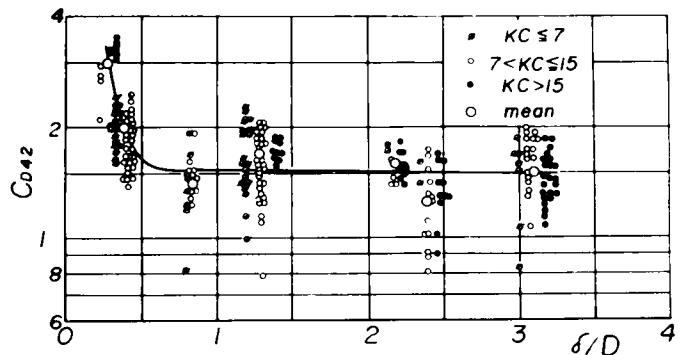


図-2.24 抗力係数に及ぼす δ/D の影響 (水平円柱の場合)

示されるべきものであるが、実験結果が重なりあうので、 δ/D に若干の幅をとって図示されている。また図中の大きな白丸は一定の δ/D に対する抗力係数の平均値であり、実線はそれらの平均的傾向を表すものである。この図から $\delta/D > 0.5$ では抗力係数は平均的に一定値となり、この範囲の実験結果を図示した図-2.23の抗力係数には proximity effect がほとんど現われないのに対して、一方 $\delta/D < 0.5$ では δ/D の値の小さいほど、proximity effect が顕著になることがわかる。第2の原因として鉛直水粒子速度に伴う水平方向の揚力の影響が考えられる。波によって円柱に作用する揚力の研究例はきわめて少ないが、鉛直円柱の場合は Bidde⁵⁰⁾によって行なわれており、揚力は最大で全波力の60%程度にもなることが報告されている。さらに、また揚力係数は $C_L \approx 1.0$ であり、水位変動と揚力の位相の遅れはおおよそ 80° 程度であるので、前述の方法で算出した水平円柱の抗力係数にも鉛直水粒子速度に伴う揚力の影響が含まれている可能性がある。図-2.25は $C_L = 1.0$ とし、鉛直水粒子速度の最大値を用いて揚力を計算して波の峯の位相での全波力の測定値 $F_{\eta=0}$ を補正した場合の抗力係数と Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数との関係を示したものであるが、この場合には揚力の位相を最大 90° まで変化させたことになる。図-2.23および図-2.25との比較から、揚力の補正をした抗力係数の方が若干小さくなることがわかる。この揚力の影響の割合は、一定の抗力係数に対して鉛直水粒子速度と水平水粒子速度の比 w/u が大きいときほど大きく、著者の実験では最大20%、平均5~6%程度であった。したがって、揚力係数や揚力の位相変化の大きさに問題はあがあるが、水平円柱の抗力係数に及ぼす揚力の効果は比較的大きいといえよう。なお、揚力を考慮しても、波の峯の位相での全波力の計算結果を一致させるかぎり、後述の全波力の時間波形はほとんど変化しないことがわかった。

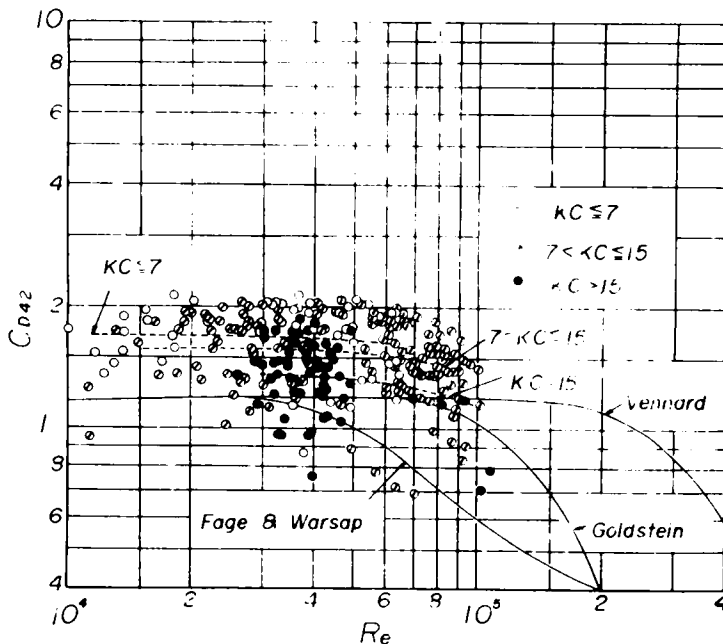


図-2.25 抗力係数の Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数による変化(2)(揚力の影響、水平円柱の場合)

最後に第3の原因として、鉛直角柱の場合に述べた2次流の発生に伴う抗力係数の鉛直方向変化の影

響があげられる。Masch らの測定結果を参考にして、抗力係数および水粒子速度の値が鉛直方向に直線的に 2 倍程度変化するものとし、水底からの波の峯高を水深の 1.2 倍に仮定して算出した水粒子速度の 2 乗に関する鉛直方向についての平均の抗力係数は、著者の水平円柱に関する抗力係数の実験結果の大部分を占める水深の 1/2 程度の深さにおける円柱の抗力係数より約 10 % 程度小さいことになる。

以上の考察から、鉛直円柱および水平円柱の抗力係数の値の相違は鉛直水粒子速度による揚力および 2 次流の発生に伴う抗力係数の鉛直方向変化などに起因しているといえる。

ii) 質量係数

a. 鉛直円柱の場合：図-2.26 はそれぞれ第 2 定義による Stokes 波の第 4 次近似解およびクノイド

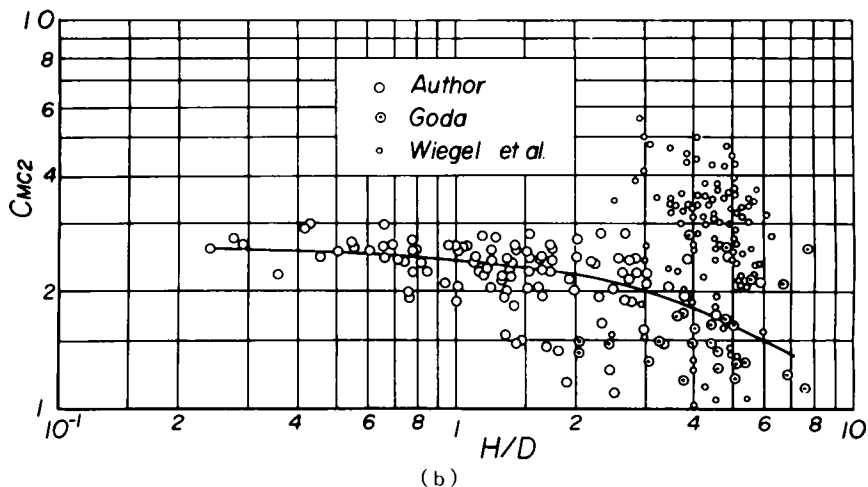
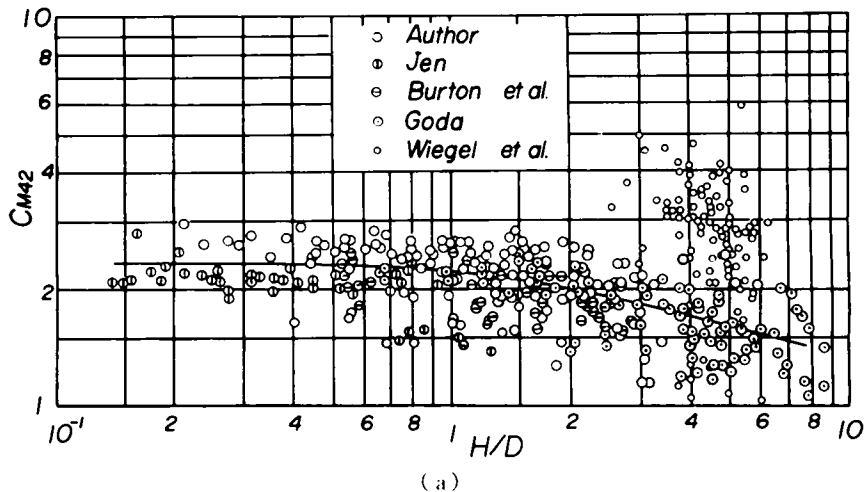


図-2.26 質量係数の H/D による変化(1) (鉛直円柱の場合)

波の第 2 近似解を用いて求めた鉛直円柱の質量係数 C_{M42} および C_{Mc2} の波高・直径比 H/D による変化を示すものである。図中の丸印は著者、合田、Burton らおよび Jen の実験結果さらに Wiegel らの現地観測結果であり、また実線は質量係数の値を H/D の適当な区間に分割し、それらを平均化して得られた質量係数の平均曲線を示す。これらの図から明らかなように、Stokes 波およびクノイド波のいずれの理論を用

いても、質量係数の値にそれほど差異は現われない。また、実験結果のばらつきは大きい、 H/D の値の増加は、全波力に占める抗力の割合の増加を意味している、抗力が支配的な領域では一方向の加速度をもつ流体中の質量係数に対する Sarpkaya および Garrison の研究からも類推されるように、うずの発生や発散のために質量係数が減少するものと思われる。

なお、以上の考察では、Wiegel らの結果が現地観測であるために、質量係数を求める際、かなりの誤差が入りやすいと考えられたので、これを無視した。また、従来の結果は、一般に 2 次元ポテンシャル流理論で与えられる $C_M = 2$ に近いが、著者の結果では平均して $C_M = 2.3 \sim 2.4$ にも及んでおり、これが本質的なものか実験上の誤差かは不明である。この場合、実験に用いた波力測定系の動特性の波力に及ぼす影響は、その水中固有振動数が実験波の周期の 8 ～ 16 倍程度であったので、ほとんど無視できると考えられた。第 1 定義による Stokes 波の第 4 次近似解および微小振幅波理論を用いた場合の質量係数 C_{M41} および C_{M1} を図 - 2.26 と同様に図示したものが図 - 2.27 である。これらの図の比較から明らかなように、微小振幅波理論による質量係数は他の理論による結果より若干大きいだけであるので、Morison の波

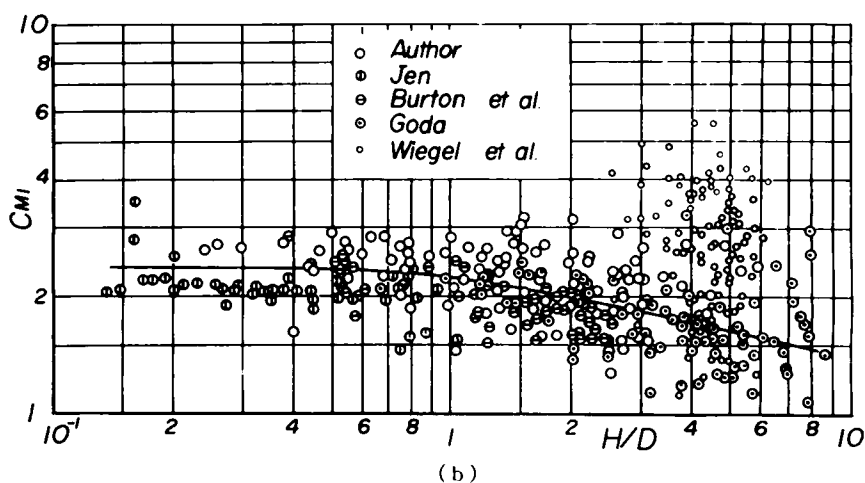
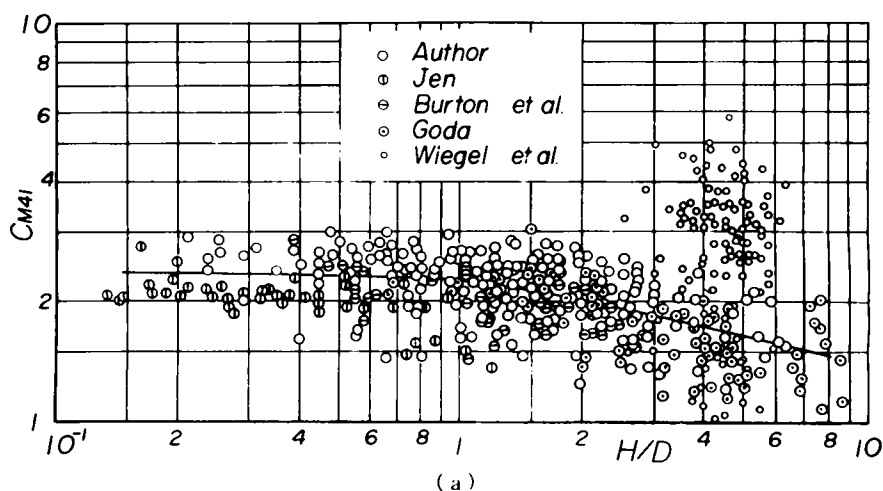
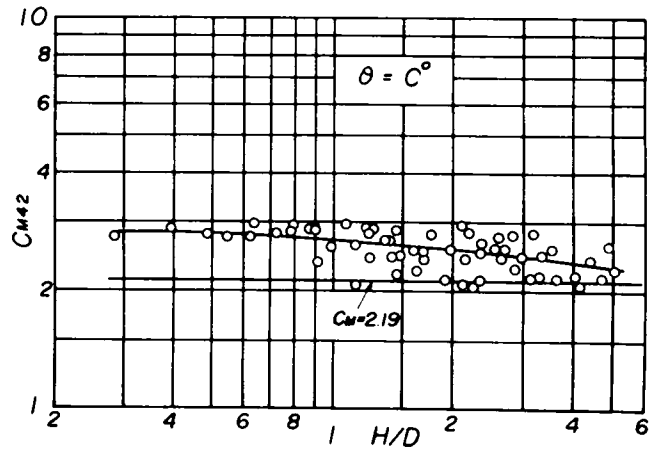


図 - 2.27 質量係数の H/D による変化(2) (鉛直円柱の場合)

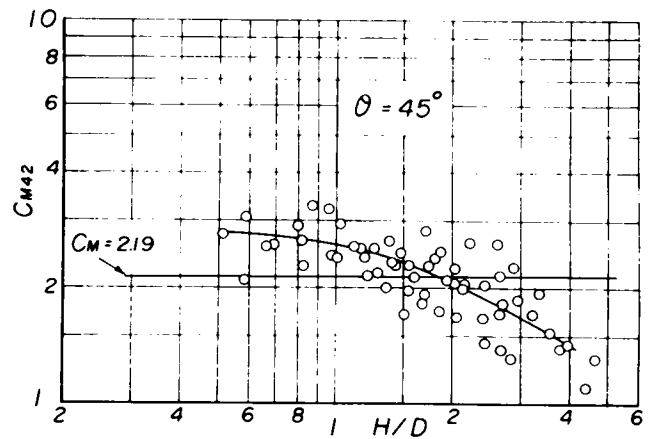
力算定式に従うかぎり、質量係数の算出方法は波の非線型性の影響をあまり受けないことがわかる。また、第2定義による水粒子加速度は一般に第1定義によるものより若干大きいので、質量係数は逆に小さくなる。

b. 鉛直角柱の場合：図-2.28 はそれぞれ $\theta = 0^\circ$ および 45° の場合に対して第2定義による Stokes 波の第4次近似解を用いて算出した鉛直角柱の質量係数と H/D との関係を示したものである。2次元ポテンシャル流理論によれば、加速流体中の角柱の質量係数は角柱断面の辺長の比の関数として理論的に与えられ、正四角柱の場合には $C_M = 2.19$ となる。⁵¹⁾ 一方、この図によれば、波動運動中の鉛直角柱の質量係数は H/D の値が小さいときには $C_M = 2.19$ よりかなり大きく、また H/D の増加とともに減少している。とくに、 $\theta = 45^\circ$ の場合の減少の割合は $\theta = 0^\circ$ の場合に比べてかなり急激である。この原因は前述の鉛直円柱の場合と同様に、境界層のはくりに伴ううずの発生発散機構や波の角柱による変形特性の相違によるものと思われる。

c. 水平円柱の場合：抗力係数の場合と同様に、質量係数に及ぼす proximity effect を検討するために、 H/D をパラメーターにして C_{M42} と δ/D との関係を図示したのが図-2.29である。質量係数に対しても proximity effect が現われ、その範囲は抗力係数の場合と同じく、 $\delta/D < 0.5$ であり、 $\delta/D > 0.5$ ではそれは無視されることがわかる。図-2.30 は第2定義による Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第2近似解を用いた proximity effect の無視される $\delta/D > 0.5$ の場合の質量係数と H/D との関係



(a)



(b)

図-2.28 質量係数の H/D による変化 (鉛直角柱の場合)

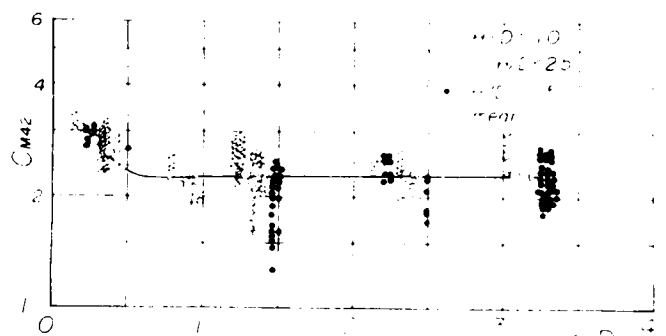
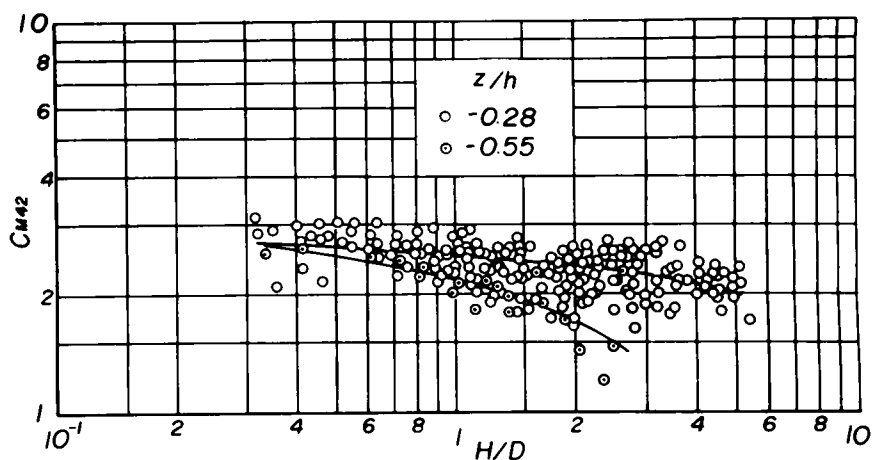
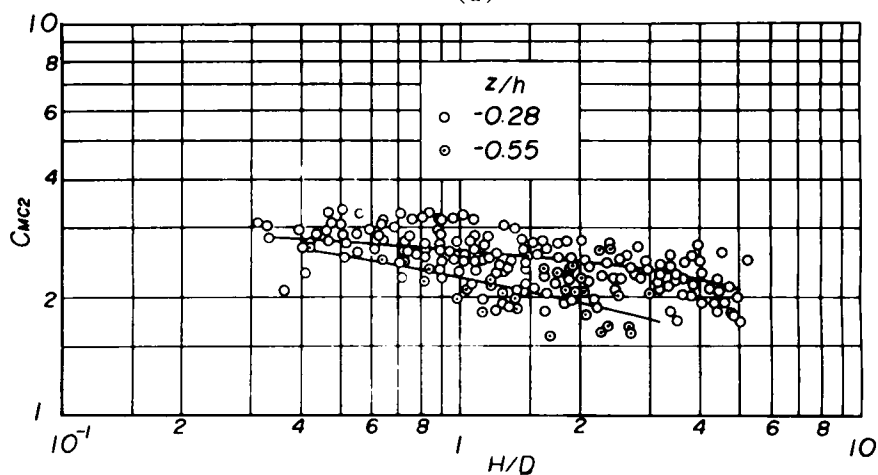


図-2.29 質量係数に及ぼす δ/D の影響 (水平円柱の場合)



(a)



(b)

図-2.30 質量係数の H/D による変化 (水平円柱の場合)

を示したものである。これによれば、 H/D の値の増加とともに、質量係数値は減少する傾向があり、いずれの有限振幅波理論を用いても、その値がそれほど変化しないことは鉛直円柱の場合と同様である。また、水平円柱の質量係数も平均値は 2.3 ～ 2.4 程度となり、鉛直円柱に関する著者の実験結果とよく対応している。さらに、図中には水平円柱の設置水深によって質量係数を区別してあるが、設置水深が小さいほど、 H/D の増加とともに質量係数が減少する傾向が著しい。これは円柱の設置水深によって、水平および鉛直水粒子速度による円柱の後流の形成の様子が相違し、それが質量係数に影響を及ぼすことに起因すると思われる。したがって、水平円柱の質量係数の選択には H/D のみならず、 z/h の影響も考慮する必要がある。なお、著者の計算方法によれば、質量係数に及ぼす揚力の影響はほとんどないと考えられた。

iii) 抗力係数および質量係数の位相変化の全波力に及ぼす影響

a. 鉛直円柱の場合：Keulegan および Carpenter は重複波の節に設置した水平円柱に作用する波力の実験結果から、微小振幅波理論に基づいて、抗力係数および質量係数の位相変化を求めている。しかし

有限振幅波理論に基づくかぎり、この解析法はかなり困難であるので、ここでは両係数を一定にした場合の全波力の時間波形に対する計算結果と実験結果との比較から、両係数の位相変化が全波力の時間波形に及ぼす影響を検討することにする。図-2.31は波の峯および水位変動の零点の位相において鉛直円柱の

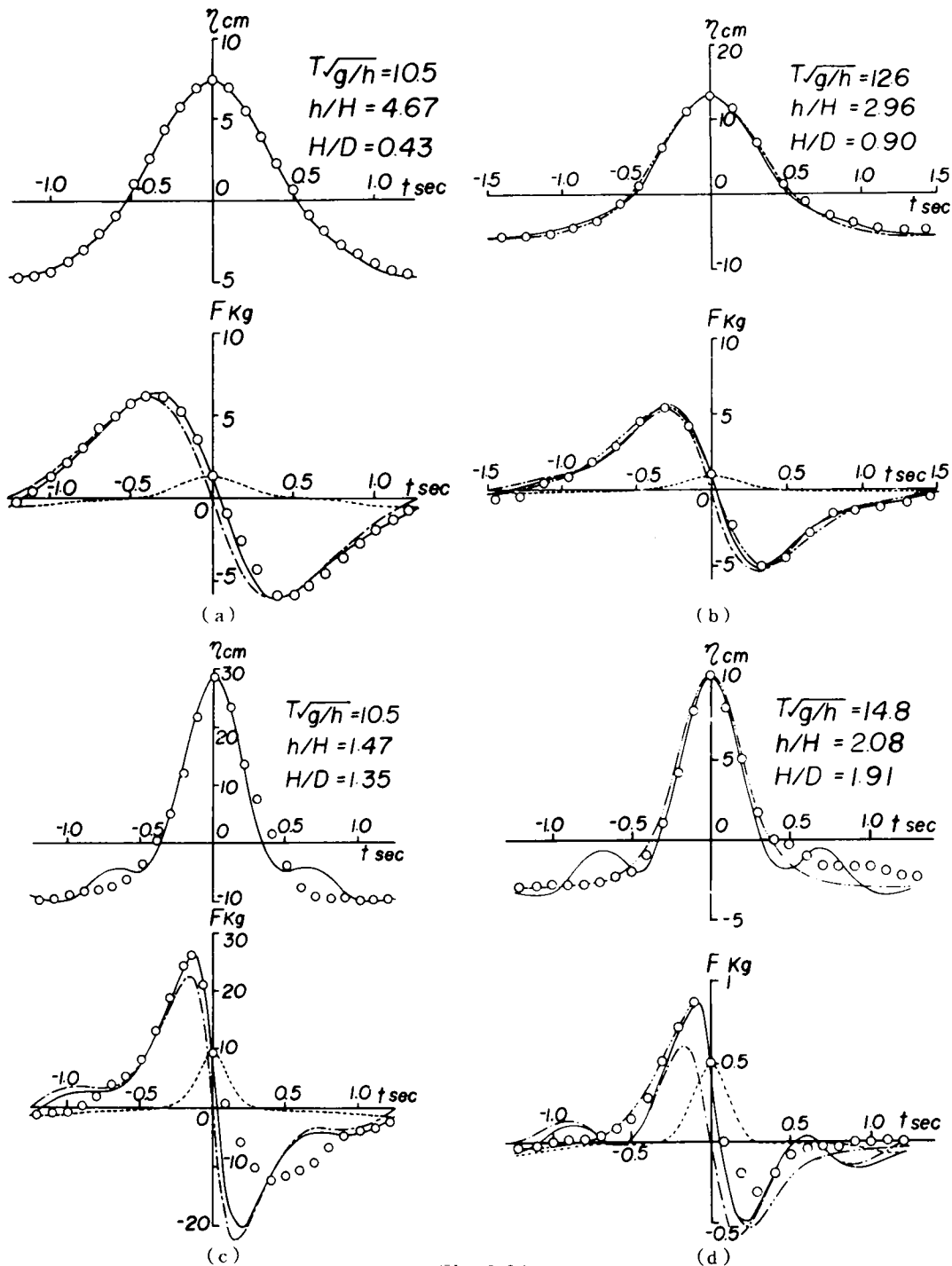


図-2.31

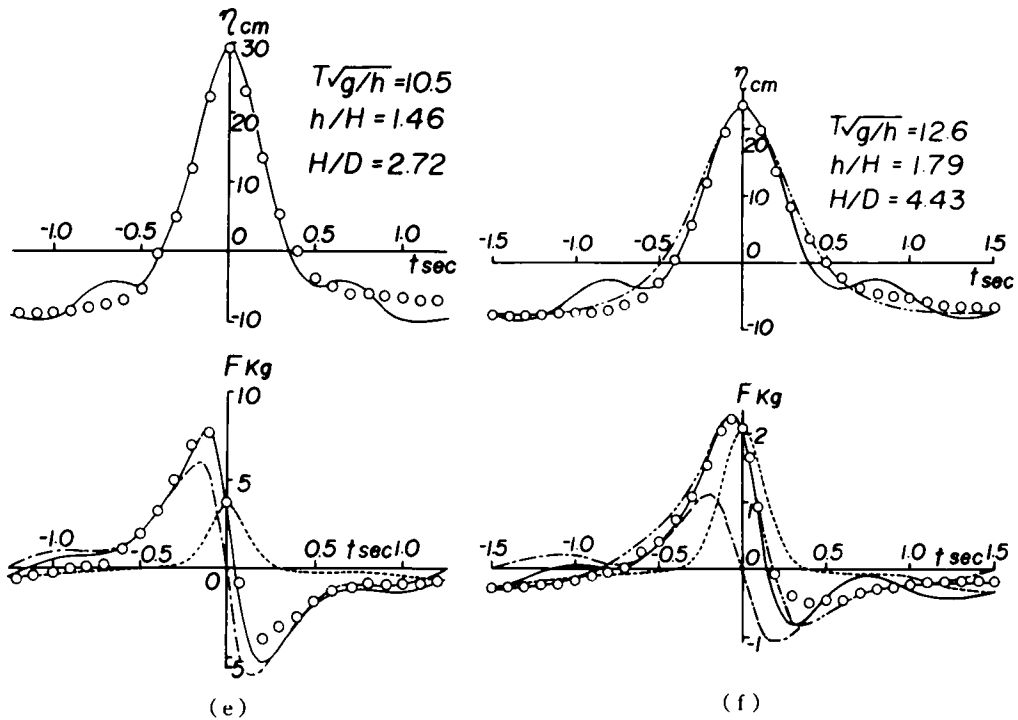


図-2.31 抗力係数および質量係数の位相変化の全波力に及ぼす影響 (鉛直円柱の場合)

全波力の実験結果から推定した抗力係数および質量係数を用いた全波力およびそれに対応する水位変動の時間波形に対する計算結果と実験結果との比較の放例を示したものである。図中の実線および2点鎖線は、それぞれ第2定義による Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第2近似解による水位変動と全波力とを表わし、点線および1点鎖線は Stokes 波の第4次近似解による抗力および慣性力を示す。これらの図によれば、全般に両者の対応はかなり良好であって、 h/H の値が比較的大きく、慣性力の卓越する H/D の値の小さいときには、水位変動および全波力のいずれに対しても計算結果とよく一致している。一方、 h/H の値が小さくなると、Stokes 波理論による計算波形には、解の近似度と関連して、波の谷近傍に波形のひずみが現われている。しかし、 H/D の値が大きく、全波力における抗力の割合が増加している場合にも、実験結果は $T\sqrt{g/h} \leq 12.6$ に対して Stokes 波理論、 $T\sqrt{g/h} \geq 11.8$ に対してはクノイド波理論による計算結果との対応がよい。また、 h/H の値が小さい場合には、時間軸の正側において全波力の計算結果と実験結果とのへだたりの大きいものが見られる。これは、水位変動に対する両者の比較から明らかのように、底こう配の影響による水位変動波形の非対称性から生じたものである。図-2.32は図-2.31の1例について第1および第2定義による Stokes 波の第4次近似解による全波力の時間的変化の計算結果と実験結果とを比較したものである。この図から、上述の方法で推定した両係数を用いて全波力を計算するかぎり、両者の計算結果にほとんど差異は生じないが、図-2.32に示すような碎波限界に近い波に対しては、第1定義による結果は波の谷付近および全波力の最大最小点の位相で第2定義によるものより大きく、実験結果とのへだたりもわずかに増加することがわかる。

以上、これらの結果から推定されるように、両係数の位相変化が全波力の時間波形に及ぼす影響はそれほど顕著でないと考えられる。したがって、全波力の計算に際しては、実用上抗力係数および質量係数の位相変化を無視してもそれほど誤差は生じないといえよう。

つぎに、一般に慣性力の算出にあたっては、水粒子加速度において convective term を省略することが多いが、より適確に波力を評価するためには、この影響を検討しておく必要がある。図-2.33は水粒子加速度における convective term が全波力に及ぼす影響を調べるために、図-2.31の実験結果について、convective term の項を含めた場合（実線）および省略した場合（点線）の第2定義による Stokes 波の第4次近似解を用いた計算結果の比較の数例を示したものである。これらの計算結果の比較から明らかなように、convective term を省略した場合の全波力の時間波形は、それを考慮した場合に比べてより尖った形状を示し、その極値の絶対値も大きくなるが、その差は小さい。したがって、水粒子加速度の計算において convective term まで含めると、計算が複雑になるので、全波力の算定には実用上 $du/dt \approx \partial u / \partial t$ としても大きな誤差は生じないと考えられる。しかしながら、図-2.33(a)に示すように、波の非線型性が増大

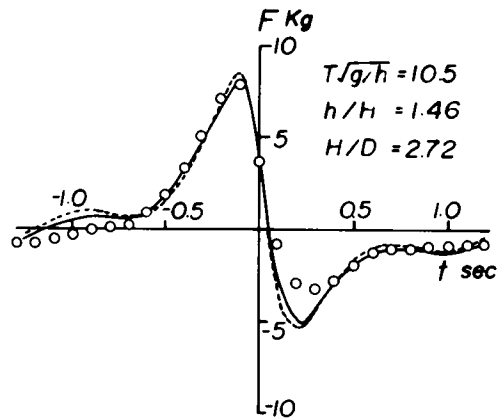
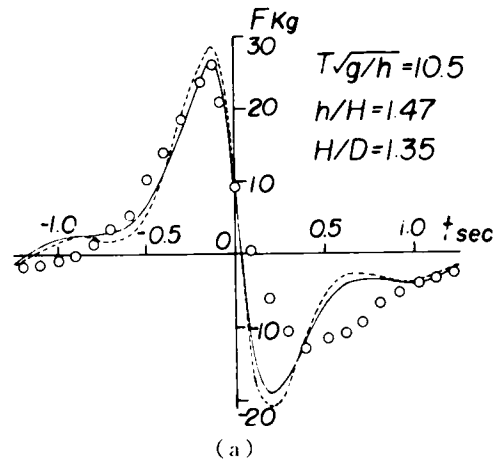
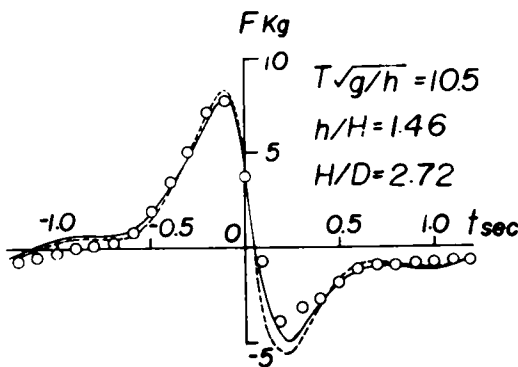


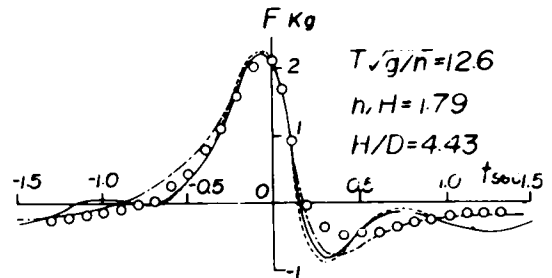
図-2.32 全波力の時間的变化に及ぼす波速の定義の影響（鉛直円柱の場合）



(a)



(b)

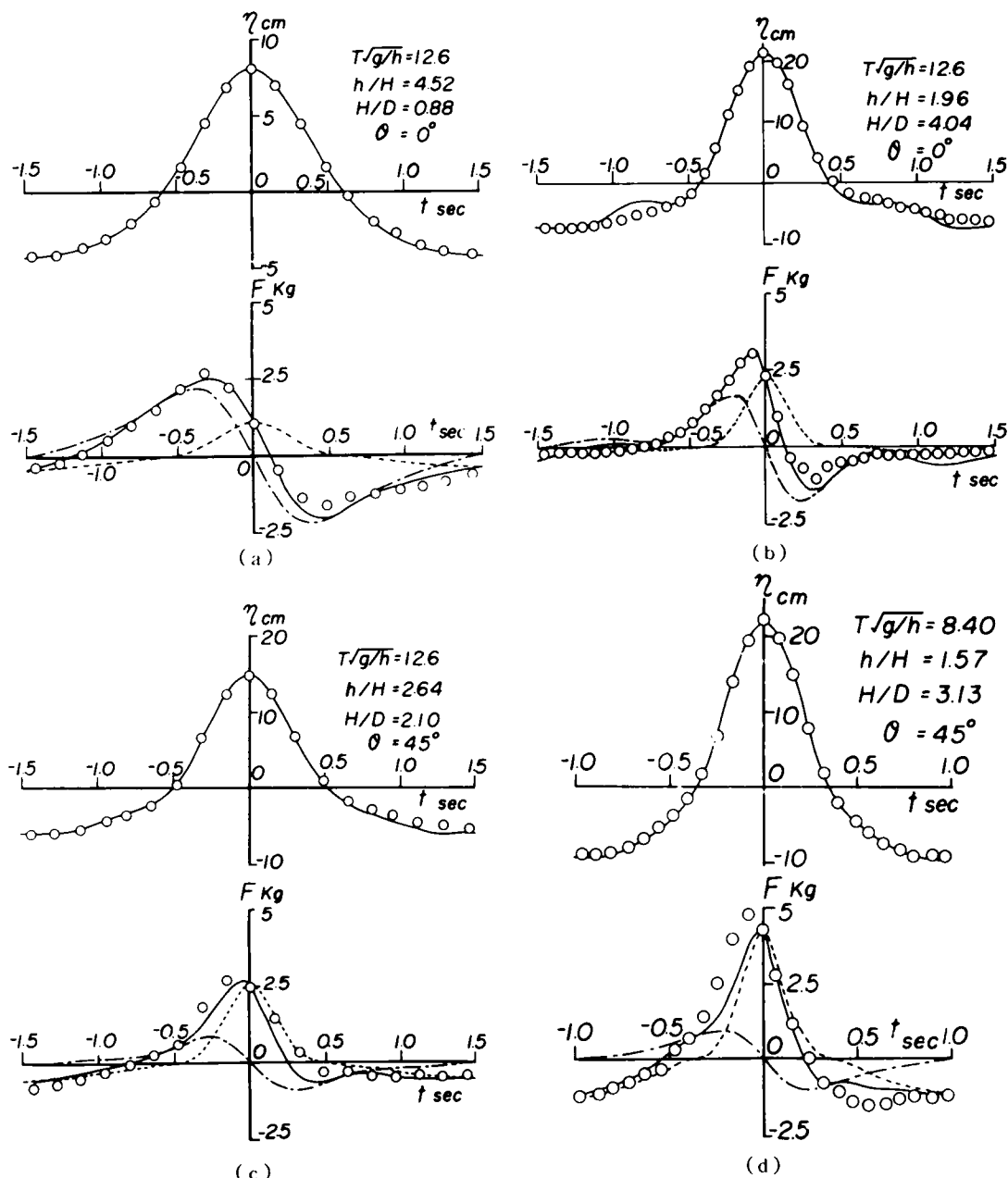


(c)

図-2.33 全波力の時間的变化に及ぼす convective term の影響（鉛直円柱の場合）

し、しかも慣性力が卓越する場合には、その影響が大きく、実測波形とのへだたりが増加するので、水粒子加速度として du/dt を用いなければならない。

b. 鉛直角柱の場合：図－2.34は鉛直角柱に作用する全波力の時間的変化を図－2.31と同様の方法で示したものである。水位変動の時間波形の実験結果が計算結果とよく一致することはすでに述べた。全波力の時間波形については、 $\theta = 0$ の場合には両者の対応が比較的よいが、一方、 $\theta = 45^\circ$ の場合には、実験結果の方が計算結果より大きく、最大値をとる位相も若干ずれている。したがって、鉛直角柱とくに $\theta = 45^\circ$ の場合のように、抗力および慣性力の評価に用いる鉛直角柱の特性長が異なる場合には、位相変化を無視して一定の抗力係数および質量係数を用いた計算方法では、それぞれの波力の評価法が適確でな



図－2.34 抗力係数および質量係数の位相変化の全波力に及ぼす影響(鉛直角柱の場合)

く、必ずしも十分な結果を与えない場合も生じるようである。したがって、こうした場合の波力の推定には両係数の位相変化を考慮する必要があると思われる。

c. 水平円柱の場合：抗力係数および質量係数の位相変化が全波力に及ぼす影響を検討するために、実験結果より推定された両係数を用いた全波力の時間的変化の計算結果と実験結果を比較したものが図-2.35

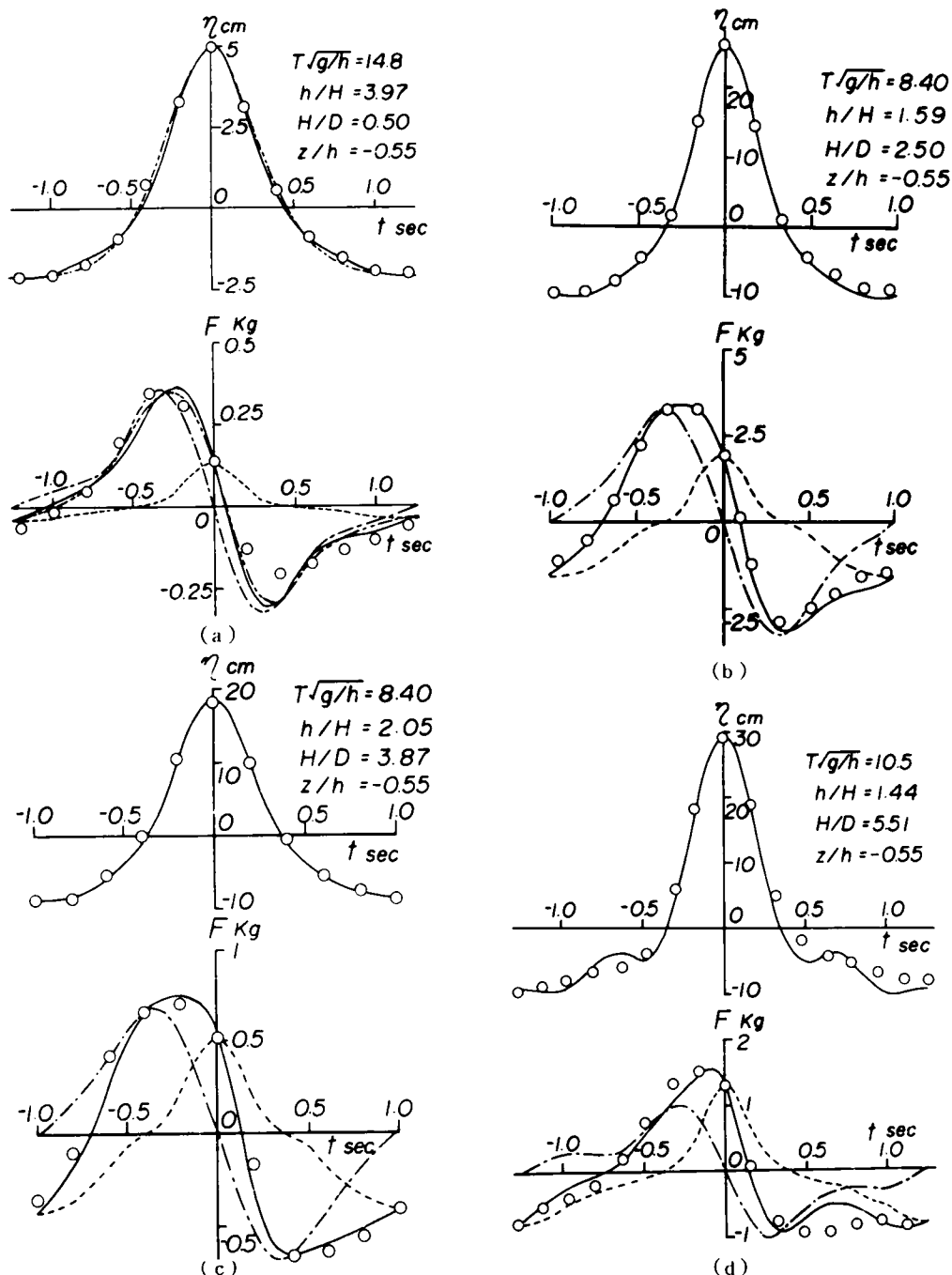


図-2.35 抗力係数および質量係数の位相変化の全波力に及ぼす影響（水平円柱の場合）

である。これらの図によれば、計算結果は実験結果とよく一致しており、水平円柱の場合も鉛直円柱の場合と同様に、これら両係数の位相変化は全波力の時間波形にそれほど大きな影響を及ぼさないと考えられる。

2.6 柱体に作用する全波力

ここでは、波や柱体の特性との関連において見出された鉛直円柱、鉛直角柱および水平円柱の抗力係数および質量係数を用いて、有限振幅波理論に基づく波力算定式から算出した全波力の最大値の計算結果と実験結果との比較より波力算定式の妥当性を検討する。ついで、全波力に関する考察では抗力係数および質量係数などに含まれる複雑な諸要素の影響のために、さらに次元解析に基づく実験結果の解析から無次元全波力の最大値に及ぼす波や柱体に関する無次元量の影響を明らかにし、これらの結果が理論計算によってどの程度説明されるかを検討する。最後に、比較的急な斜面上に設置された鉛直円柱に作用する全波力の特性を一樣水深あるいは緩こう配の場合の実験結果および計算結果との比較において若干考察する。

2.6.1 波力算定式による実験結果の検討

a. 鉛直円柱の場合：図-2.36および2.37は抗力係数および質量係数の値を実際よく用いられるように、 $C_D=1.0$ および $C_M=2.0$ として、それぞれ第2定義による Stokes 波の第4次近似解とクノイド波の第2近似解および第1定義による Stokes 波の第4次近似解と微小振幅波理論を用いた鉛直円柱に作用する全波力の最大値の計算結果 $F_{m\text{ cal.}}$ と実験結果 $F_{m\text{ meas.}}$ とを比較したものである。これらの図によれば、全波力のモーメントを測定した合田の結果は大部分抗力が卓越し、しかも推定された抗力係数は1.0より小さいために、計算結果の方が大きくなっている。また、著者の実験結果における推定された質量係数は2.0より大きくなる傾向があるので、慣性力が卓越するときは逆に前者の方が小さくなるが、いずれの有限振幅波理論によっても、両者は比較的良好に一致しているといえる。これに対して、図-2.37(b)に示す

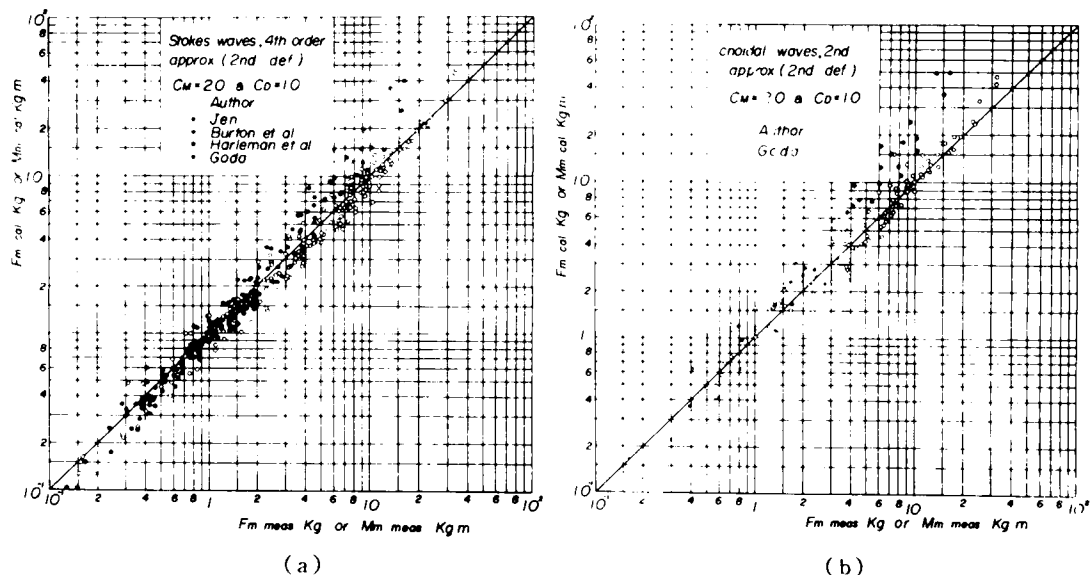
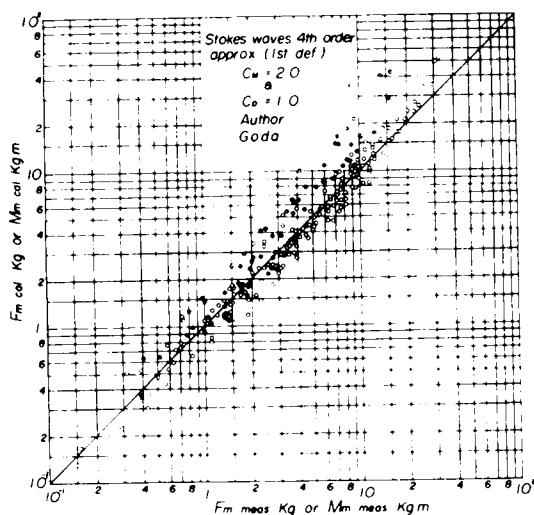
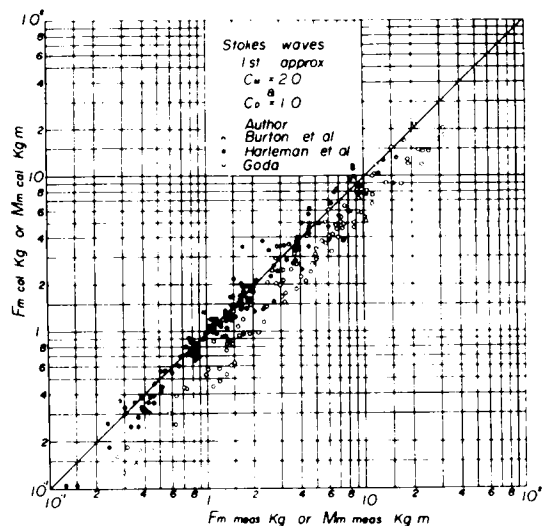


図-2.36 全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較(1)(鉛直円柱の場合)



(a)

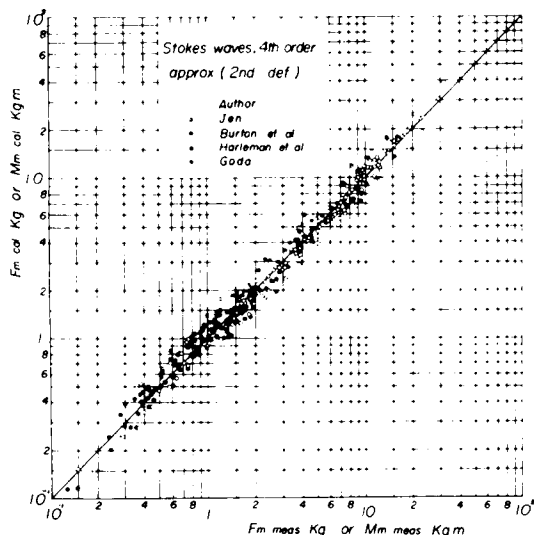


(b)

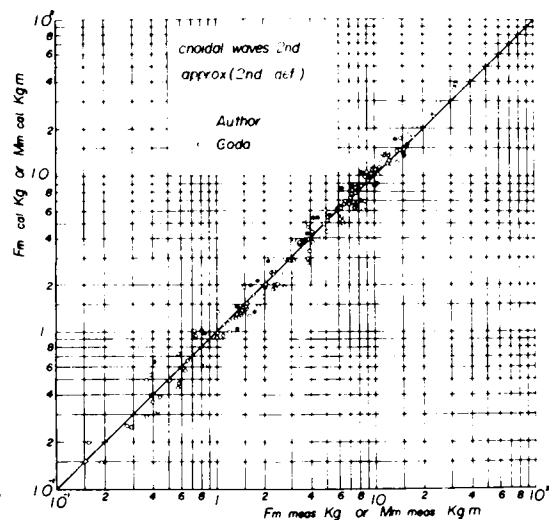
図-2.37 全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較(2)(鉛直円柱の場合)

ように、微小振幅波理論など低近似解を適用した場合には、両者の比較でその結果がかなり散乱することから考えると、有限振幅波理論を用いた波力算定式の有効性を見出すことができる。また、適切な有限振幅波理論の適用によっては、 $C_D = 1.0$ および $C_M = 2.0$ と仮定することは實際上平均的に妥当な結果を与えられられる。

つぎに、以上の比較において無視した両係数における波や円柱の特性を考慮して定めた抗力係数および質量係数を用いた全波力の最大値の計算結果と実験結果との比較を図-2.38および2.39に示す。この場合、抗力係数は与えられた T 、 h 、 H 、 D および ν を用い、式(2.102)～(2.108)に従って算出された



(a)



(b)

図-2.38 全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較(3)(鉛直円柱の場合)

$\sqrt{u_c^{2*}}$, Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数に対応して図-2.20あるいは図-2.21から、また質量係数は、 H/D に対応して図-2.26あるいは図-2.27から求めた。これらの図から質量係数を決定すると、著者の実験結果の平均曲線に対する寄与が大きいために、質量係数が2より大きくなるので、慣性力が卓越し、推定された質量係数が2に近い値をとる Jen の実験結果のように、計算結果との対応が図-2.36および37に比較して若干悪くなるものもあるが、平均的には両者の対応がよくなることとわかるであろう。とくに、合田の実験結果のように、実験結果のばらつきの幅が小さくなる場合もある。このことから、計算は若干複雑であるけれども、以上に述べた方法によって全波力を計算すれば、非碎波の波による波力に対しては、実際上かなりの精度で全波力を推定できることがわかる。

以上有限振幅波理論に基づいた波力算定式は、当然のことながらその理論の適用範囲内において用いられるべきであり、その場合には2.3で検討した適用範囲がおおよそその目やすになるであろう。また浅海で碎波するような場合の構造物に作用する波力に対しては、碎波による衝撃力なども加わり、波力の評価も碎波の特性との関連で与えられるべきことはいままでもない。

b. 鉛直角柱の場合：図-2.40は $\theta=0^\circ$ および 45° の場合について、それぞれ一様流中における正四角柱の抗力係数と2次元ポテンシャル流理論による質量係数の値 $C_D=2.05$, $C_M=2.19$ および $C_D=1.55$, $C_M=2.19$ を用い、第2定義による Stokes 波の第4次近似解に基づいた鉛直角柱の全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較を示したものである。すでに述べた波による鉛直角柱の抗力係数および質量係数の特性からも明らかなように、実験結果は計算結果よりかなり大きい。とくに $\theta=45^\circ$ の場合にはこの傾向が著しく、計算結果の2倍近い値を示す。一方、図-2.41は図-2.22および2.28に従って、波および鉛直角柱の特性から決定した抗力係数および質量係数を用いた全波力の計算結果と実験結果とを比較したものである。この場合は図-2.40に比べてかなり資料のばらつきが小さくなっているけれども、平均して約15~20%程度実験結果の方が大きく、また $\theta=45^\circ$ の場合の方が計算

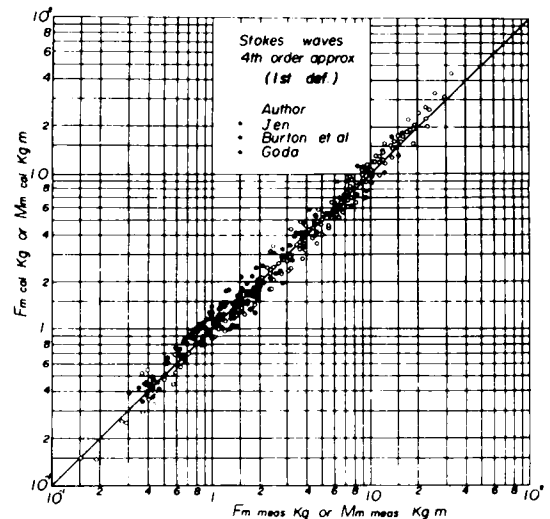


図-2.39 全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較4(鉛直円柱の場合)

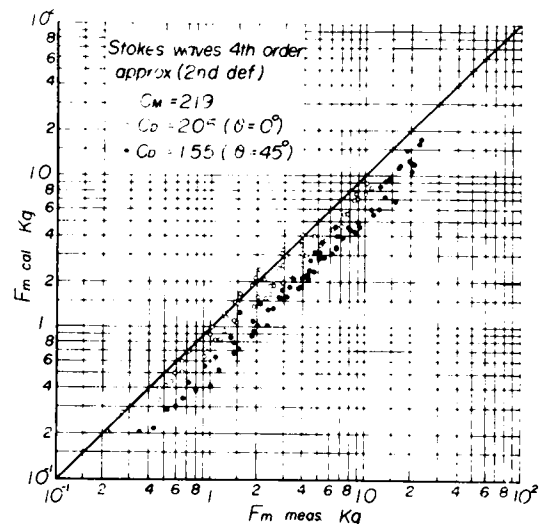


図-2.40 全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較1(鉛直角柱の場合)

結果とのへだたりがより大きくなる傾向がある。

c. 水平円柱の場合：前述したように、鉛直円柱の場合と相違して、水平円柱の抗力係数は proximity effect や鉛直水粒子速度による水平方向の揚力および水粒子速度のこう配の影響を、また質量係数は proximity effect などを受けるので、水平円柱の全波力の計算に際してこれらを適確に評価する必要があることはいうまでもない。しかしながら、これらを数式によって表わすことはかなり困難であるので、ここでは実用上の目的から水平水粒子速度および加速度で便宜的に算出された図-2.23 および図-2.30 に示す抗力係数および質量係数を用いて式(2.79)による単位長さあたりの波力の最大値に対する計算結果と実験結果とを比較検討すれば、

つぎのようである。すなわち、図-2.42 は proximity effect が無視される $\delta/D > 0.5$ の場合について第2定義に基づく Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第2近似解を用いた上記の方法による結果であるが、これらは抗力係数および質量係数をそれぞれ $C_D = 1.0$ および $C_M = 2.0$ として計算した図-2.43 の結果に比べて、実験結果と比較的よく一致しているといえる。

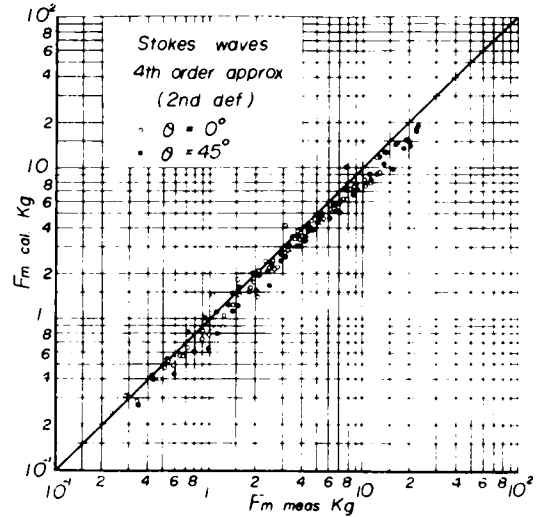


図-2.41 全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較 2(鉛直角柱の場合)

2.6.2 全波力に関する次元解析結果と波力算定式による検討

いま、鉛直柱体の粗度および振動特性を考慮しないことにすれば、全波力 F に関する物理量として次式が考えられる。

$$\phi_p(F, T, h, H, D, g, \nu, \mu, \rho, \theta, i) = 0 \quad (2.109)$$

ここに、 μ ：粘性係数および θ ：波の入射方向に対する鉛直柱体の設置角度である。さて、式(2.109)において適当な基本量を選んで Buckingham の π 定理により次元解析を行ない、若干変形すれば、無次元全波力 $F/\rho g D^3$ は次式で与えられる。

$$\frac{F}{\rho g D^3} = \phi_{F_1} \left(T \sqrt{\frac{g}{h}}, \frac{h}{H}, \frac{H}{D}, \frac{HD}{\nu T}, \frac{\nu}{T}, \theta, i \right) \quad (2.110)$$

ここに、 $HD/\nu T$ ：Reynolds 数に相当する量である。つぎに、全波力の最大値 F_m のみを考え、底こう配を一定とし、また粘性の効果を無視すれば、式(2.110)は次式のように簡略化される。

$$\frac{F_m}{\rho g D^3} = \phi_{F_2} \left(T \sqrt{\frac{g}{h}}, \frac{h}{H}, \frac{H}{D}, \theta \right) \quad (2.111)$$

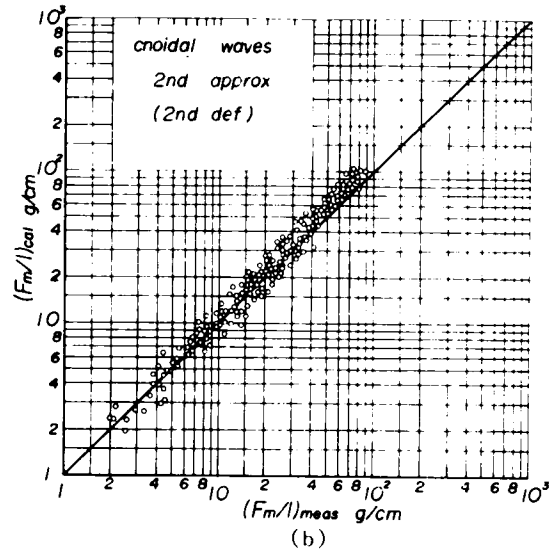
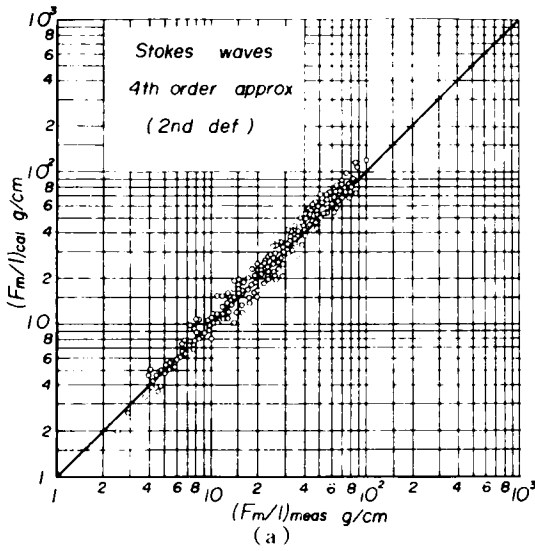


図-2.42 波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較 (1)(水平円柱の場合)

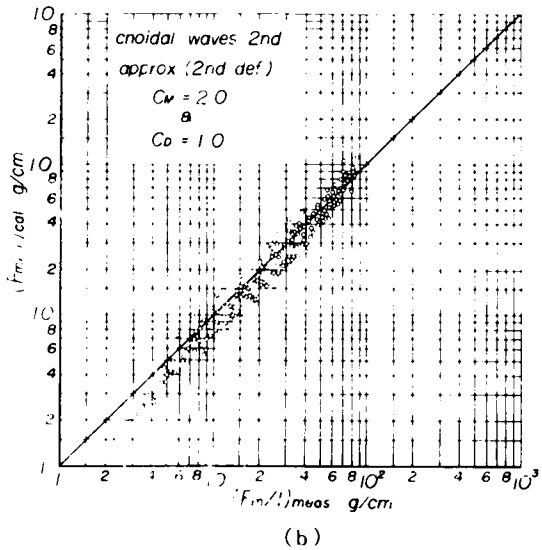
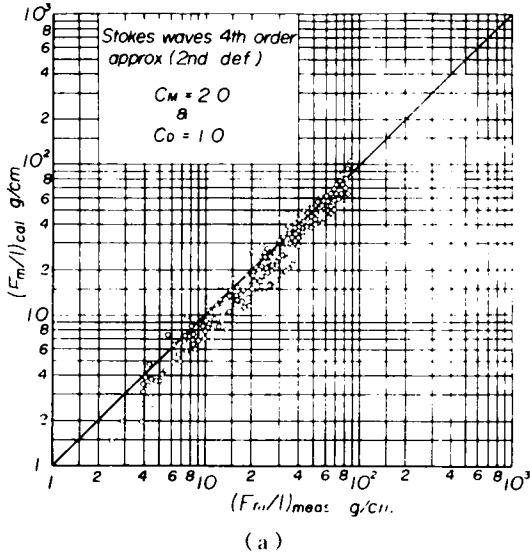


図-2.43 波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較 (2)(水平円柱の場合)

したがって、前述の仮定のもとに鉛直円柱に作用する無次元全波力の最大値は、 θ に依存しないので、3つの無次元量 $T\sqrt{g/h}$ 、 h/H および H/D の関数として表わされ、また鉛直角柱のそれは3つの無次元量のほか θ の関数となる。

同様に、水平円柱に作用する単位長さあたりの無次元波力の最大値 $F_m/\rho g \ell D^2$ は、つぎの関係で与えられる。

$$\frac{F_m}{\rho g \ell D^2} = \phi_{F_3} \left(T\sqrt{\frac{g}{h}}, \frac{h}{H}, \frac{H}{D}, \frac{z}{h} \right) \quad (2.112)$$

a. 鉛直円柱の場合：図-2.44は底こう配1/100の場合の鉛直円柱に関する著者の実験結果のうちから、 H/D および h/H の値がほぼ一定であるものについて、 $F_m/\rho g D^3$ と $T\sqrt{g/h}$ との関係を示したもので

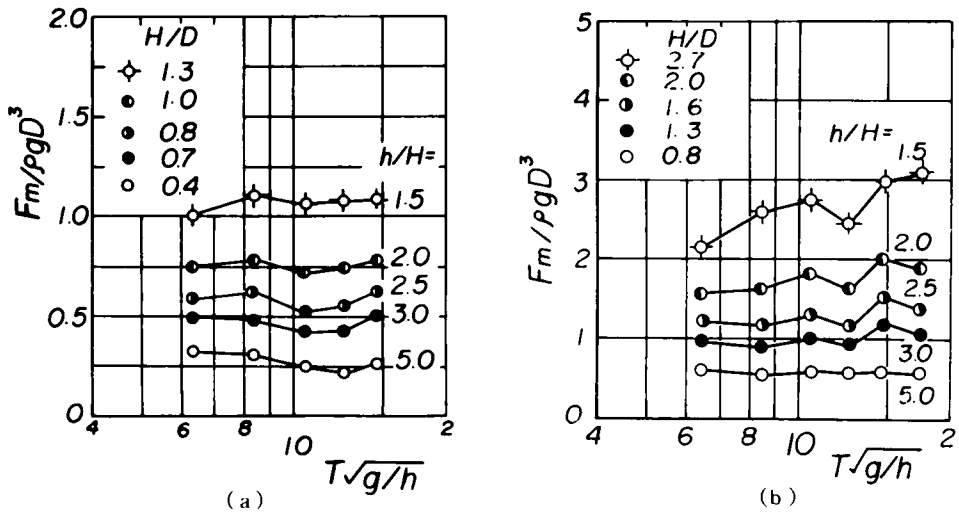


図-2.44 $F_m/\rho g D^3$ の $T\sqrt{g/h}$ による変化（鉛直円柱の場合）

ある。実験結果が限定されているので、十分な考察はできないが、 $H/D \leq 0.8$ で $h/H \leq 5$ の場合には $F_m/\rho g D^3$ は $T\sqrt{g/h}$ とともに単調に減少するのに対して、 $0.7 \leq H/D \leq 1$ で $h/H \leq 3$ の場合には若干減少したのち増加し、また、 $H/D \geq 1.3$ で $h/H \leq 3$ の場合には単調に増加することがわかる。

つぎに、 $T\sqrt{g/h}$ および h/H の値をパラメーターとして $F_m/\rho g D^3$ の H/D による変化を図-2.45(a)に示す。これには、 $F_m/\rho g D^3$ が H/D とともに急激に増加する傾向がよく現われているが、この場合の h/H による変化は、実験条件の制約もあって、あまり明確ではない。図-2.45(b)は著者および従来の実験結果について、 $T\sqrt{g/h}$ の影響を無視し、 h/H をパラメーターにした $F_m/\rho g D^3$ と H/D との関係を示したものであり、図中の曲線は、それぞれの h/H の値の範囲に対する著者の実験結果の平均曲線を表す。この図によれば、 $T\sqrt{g/h}$ およびReynoldsの影響や実験誤差のために、若干のばらつきはあるけれども、 $H/D < 2$ の場合には、

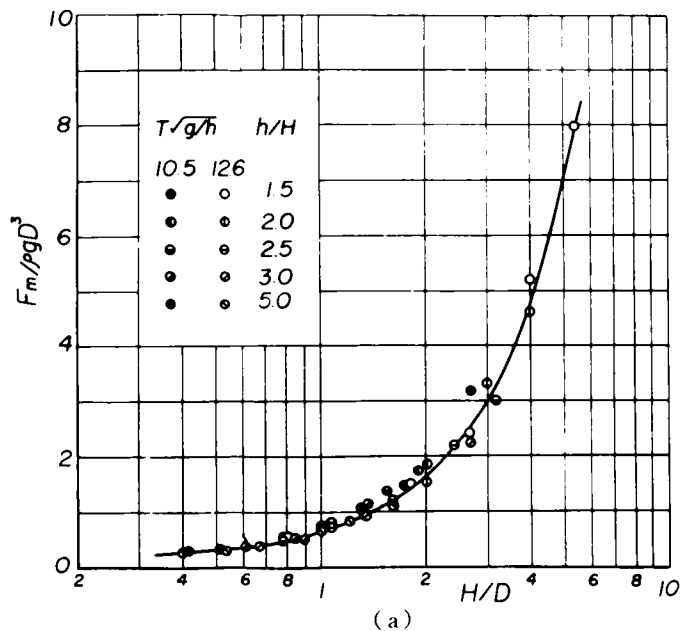
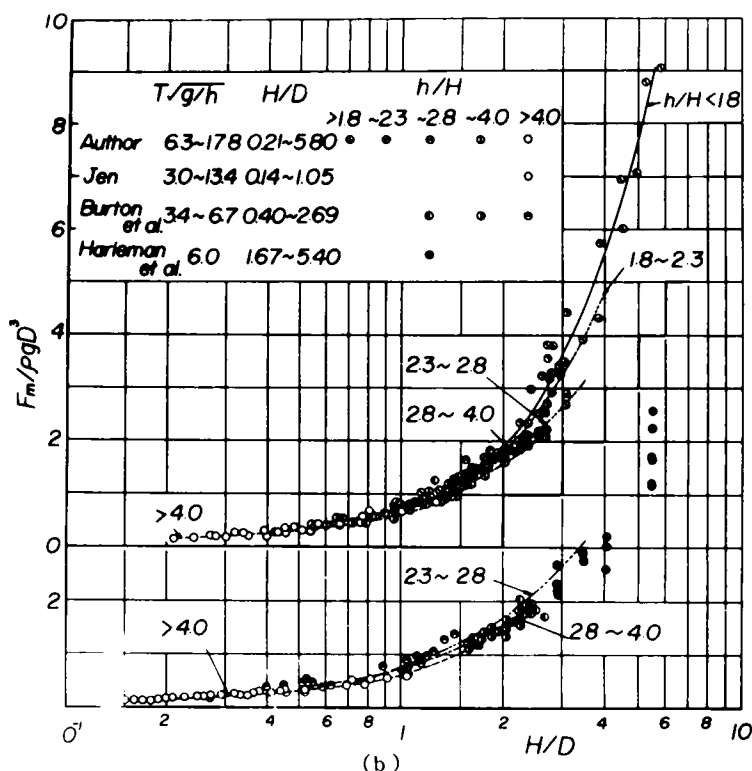


図-2.45

これらの平均曲線がたがいに交って、 h/H の影響はそれほど顕著でない。これに対して、 $H/D > 2$ の場合には、



図一 2.45 $F_m/\rho g D^3$ の H/D による変化(1)(鉛直円柱の場合)

h/H の影響が現われ、 $F_m/\rho g D^3$ の値は同一の H/D の値に対して、 h/H の値が小さいほど大きくなる傾向を示す。また、著者の実験結果より求めた平均曲線と従来の結果との対応は比較的良好であるが、Burton らおよび Harleman らの結果の中には両者のへたりの大きいものも見られる。これは $T\sqrt{g/h}$ および Reynolds 数の影響、さらには実験方法の相違などによるものであろう。したがって、上述の考察のように、 $F_m/\rho g D^3$ は、実験の範囲内で H/D ともっとも密接に関係づけられるが H/D の値が大きくなると、 h/H の影響を無視できないことがわかる。

以上のように、次元解析による実験結果の考察から、無次元全波力の最大値に関して興味深い結果が得られたので、これが前述した有限振幅波理論に基づく波力算定式によって、どの程度説明できるかを検討しておこう。図一 2.46 は、 H/D 、 $T\sqrt{g/h}$ および h/H の $F_m/\rho g D^3$ に対する影響を理論計算によって明らかにするために、抗力係数および質量係数の値をそれぞれ 1.0 および 2.0 とし、第 2 定義による Stokes 波の第 4 次近似解を用いて $F_m/\rho g D^3$ を計算した結果を示す。この図は各無次元量についてかなり広範囲に計算されたものであるが、これから、無次元全波力の最大値 $F_m/\rho g D^3$ は H/D のみでなく、 h/H および $T\sqrt{g/h}$ によってかなり変化し、とくに、非線型項に対応する h/H の影響が大きいことがわかる。また、 $F_m/\rho g D^3$ は H/D および h/H とともに単調に増大するのに対し、 $T\sqrt{g/h}$ の増加に対してはかならずしも増大せず、 H/D および h/H のある範囲ではむしろ減少し、前述した次元解析の結果とよく対応している。さらに、無次元全波力の最大値の実験結果が見かけ上 H/D と密接に関係づけられるのは、実験条件が限られていることにもよるが、そのほか C_D および C_M の値が一定でなく、それぞれ Reynolds 数、Kuelegan-Carpenter 数

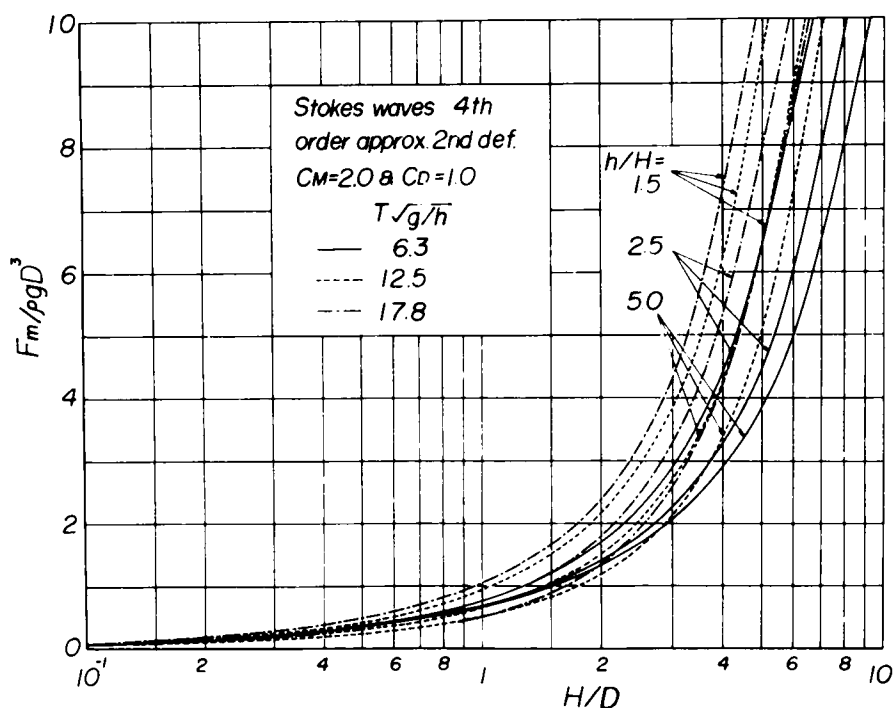


図-2.46 $F_m / \rho g D^3$ の H/D による変化(2)(鉛直円柱の場合)

および H/D によって変化し、それらが $T\sqrt{g/h}$ および h/H の影響を相殺する方向に作用していることや計算に用いた Stokes 波の第 4 次近似解の適用限界と関連して、 h/H の値の小さい場合や $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合には、これらの無次元量の影響が過大に評価されていることにもよると思われる。図-2.47 はこのことを検討するために示したものである。図中の実線は $C_D = 1.0$ および $C_M = 2.0$ として求めた Stokes 波の第 4 次近似解による計算結果のうち、図-2.45 の h/H および H/D の実験範囲に対して図示したものであり、また図中の丸印は波や円柱の特性を考慮して図-2.20 および 2.26 に従って推定した抗力係数および質量係数を用いた図-2.45 に対応する計算結果である。この図から、後者の計算結果の方が前者のそれに比べて h/H による変動が小さくなっていることがわかる。したがって、実用上、鉛直円柱に作用する全波力の近似計算にあたっては、 $H/D < 2$ の範囲に対して、以上の次元解析の結果から全波力を推定することができるであろう。

b. 鉛直角柱の場合：図-2.48 は鉛直角柱の実験結果について鉛直円柱の場合の図-2.45 と同様に、 $F_m / \rho g D^3$ と H/D との関係を示したものであり、 $\theta = 45^\circ$ の場合の実験結果の考察では D として $\sqrt{2}D$ を用いている。鉛直円柱の実験結果と比較してさらに実験条件が制約されているので、もちろん問題はあっても、鉛直円柱の結果と同様に、鉛直角柱に作用する無次元全波力の最大値 $F_m / \rho g D^3$ も見かけ上 H/D と密接に関連づけられることが見出される。また、こうした方法で表示された $F_m / \rho g D^3$ と H/D との関係は実験の範囲内で、鉛直角柱の設置の向きにほとんど依存しないことは興味深い。さらに、図-2.45 に示した鉛直円柱の場合との比較や抗力係数の特性から明らかなように、鉛直角柱に作用する全波力は鉛直円柱のそれよりかなり大きい。つぎに、第 2 定義による Stokes 波の第 4 次近似解を用いて、 C_D

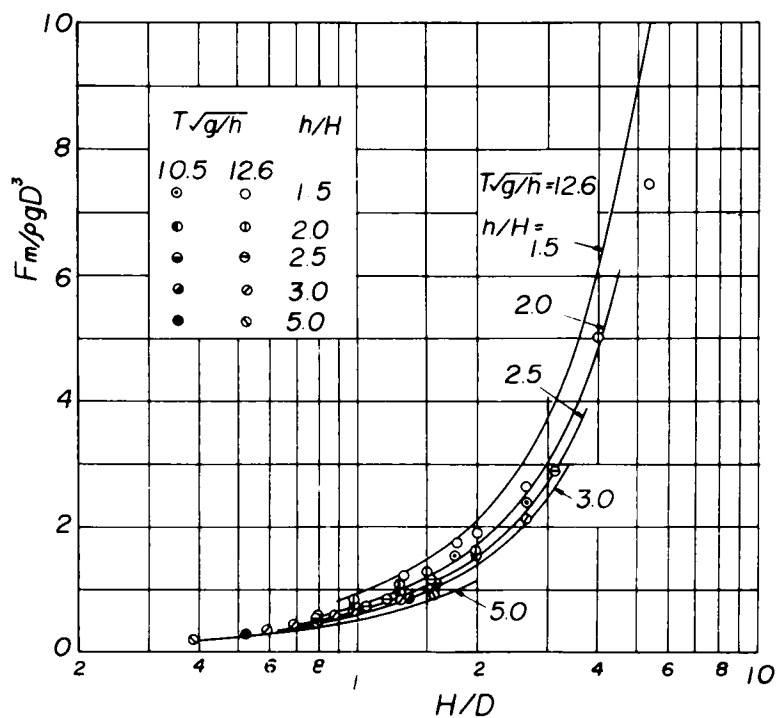


図-2.47 $F_m/\rho g D^3$ の H/D による変化(3)(鉛直円柱の場合)

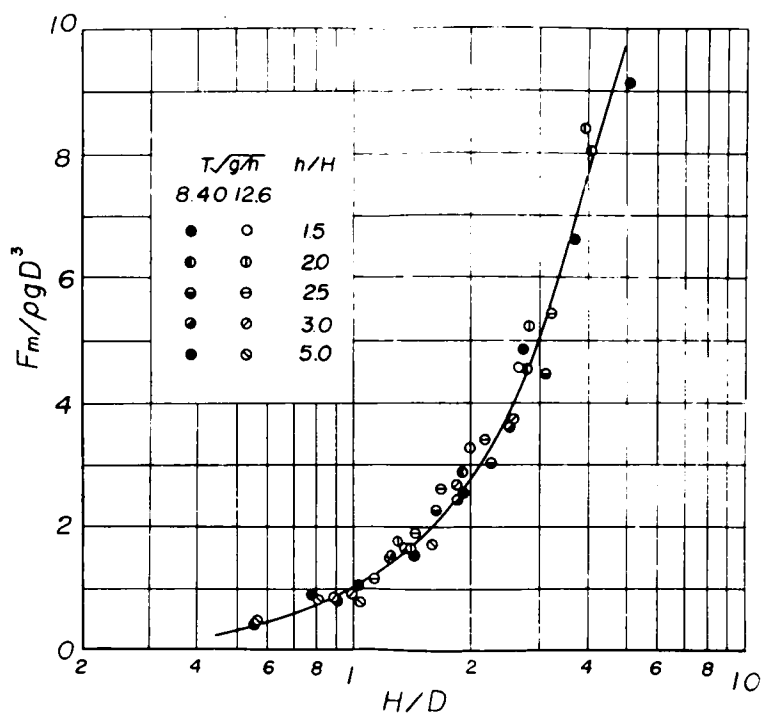


図-2.48 $F_m/\rho g D^3$ の H/D による変化(1)(鉛直角柱の場合)

$= 2.05$ および $C_M = 2.19$ として $\theta = 0^\circ$ の場合の鉛直角柱に作用する全波力の最大値 $F_m/\rho g D^3$ と H/D との関係を示したものが図-2.49である。これによれば、 $F_m/\rho g D^3$ が H/D とともに単調に増大する定性的な傾向は鉛直円柱の場合とほぼ同様である。

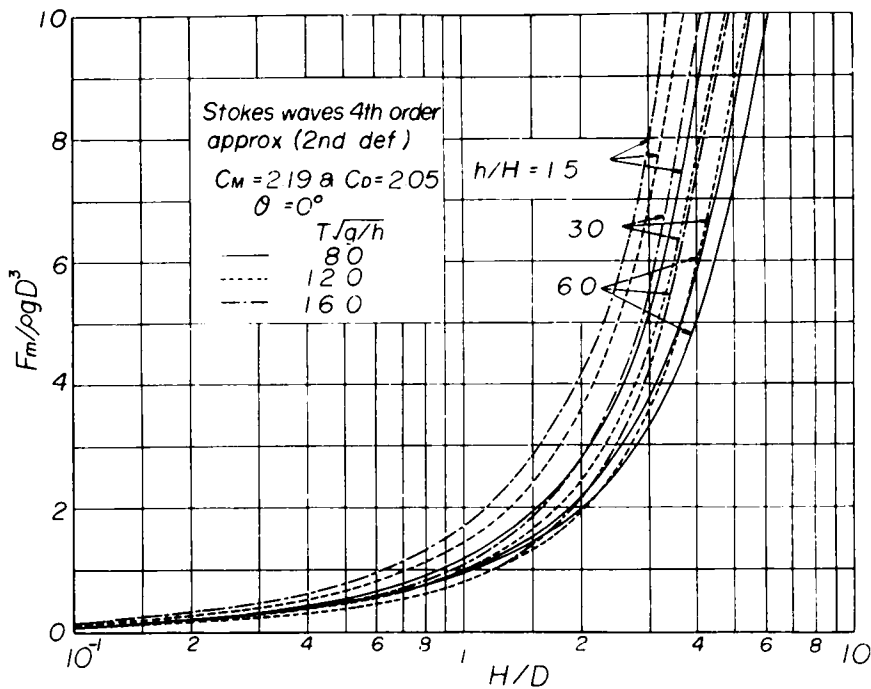


図-2.49 $F_m/\rho g D^3$ の H/D による変化(2)(鉛直角柱の場合)

c. 水平円柱の場合：水平円柱に作用する単位長さあたりの波力の最大値に関する要素としては前述の仮定に基づく次元解析に従えば、 $T\sqrt{g/h}$ 、 h/H 、 H/D のほかに、円柱の設置水深を表わす z/h が加えられる。図-2.50は水平円柱に作用する単位長さあたりの波力の最大値 $F_m/\rho g D^2$ と $T\sqrt{g/h}$ の関係を h/H 、 H/D および z/h をパラメーターにして示したものである。鉛直円柱の場合よりさらに波力に関する無次元量が増えているので、実験結果はきわめて制限されたものになり、この図から $F_m/\rho g D^2$ の一般的な特性を考察することはできないが、一定の h/H 、 H/D および z/h の値に対して、 $F_m/\rho g D^2$ は h/H の値の小さい場合には、 $T\sqrt{g/h}$ とともに若干増加し、 h/H の値の大きい場合にはむしろ減少する傾向にある。図-2.51は $F_m/\rho g D^2$ の H/D による変化を示したものである。この図によれば、 $F_m/\rho g D^2$ は $H/D < 1$ でほとんど一定であるのに対して、 $H/D > 1$ では H/D とともに増加している。そしてその増加の割合は h/H の値の小さいときほど著しい。つぎに、

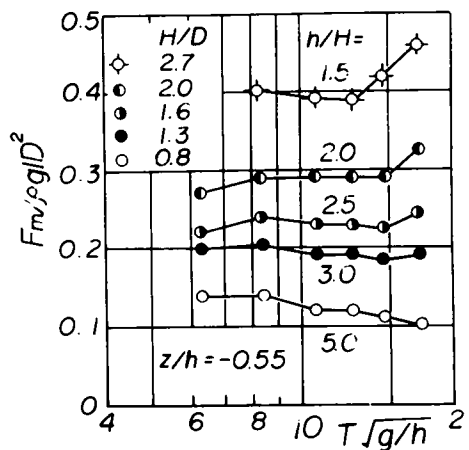
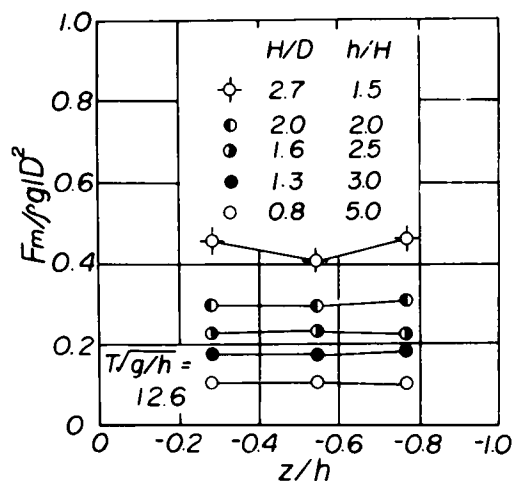
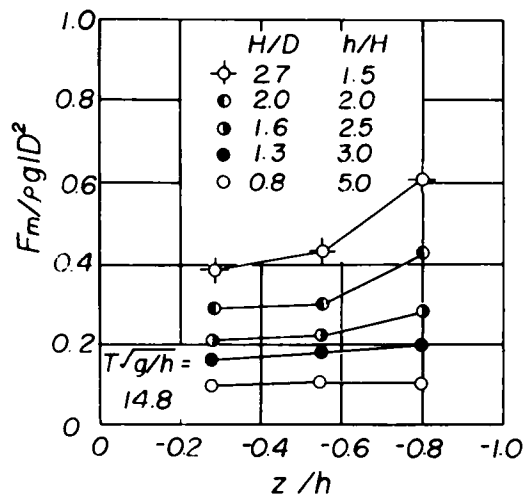


図-50 $F_m/\rho g D^2$ の $T\sqrt{g/h}$ による変化 (水平円柱の場合)

図-2.52は $T\sqrt{g/h}$, h/H および H/D の値が一定の場合の $F_m/\rho g \ell D^2$ に及ぼす z/h の影響を調べたものである。これらの図によれば、 $z/h \geq -0.78$ では z/h の値にかかわらず、 $F_m/\rho g \ell D^2$ はほとんど一定の値をとるか、むしろ z/h の絶対値の減少とともにわずかであるが減少する傾向がある。この結果は揚力や水粒子速度のこう配などの影響によるものであり、理論における各パラメーターの影響を検討するために便宜上抗力係数および質量係数の値をそれぞれ $C_D = 1.0$ および $C_M = 2.0$ とし $F_m/\rho g \ell D^2$ を計算した図-2.53とは逆の傾向を示す。さらに、波動理論によれば、同一の波の特性に対して水粒子速度および加速度のもっとも小さい $z/h = -0.8$ の場合の $F_m/\rho g \ell D^2$ の値は



(a)



(b)

図-2.52 $F_m/\rho g \ell D^2$ の z/h による変化(1)(水平円柱の場合)

他の設置水深の場合よりむしろ大きくなっている。この場合の δ/D の値は約 0.3 であるので、これは前述した proximity effect が顕著に現われた結果といえる。したがって、水底近傍に設置された水平円柱のような構造物に作用する波力の推定には proximity effect を考慮する必要がある、この場合の抗力係数や質量係数および全波力の推定には図-2.24、図-2.29 および図-2.52 が一応の目安になるであろう。つぎに、両係数を一定とした理論計算によって $F_m/\rho g \ell D^2$ に及ぼす $T\sqrt{g/h}$, h/H および H/D の影響を検討したのが図-2.54である。この計算に用いた両係数の値は実験結果から得られたものより小さく、しかも一定値であるので、両者の定量的な対応は必ずしも十分でないけれども、計算結果は、 $F_m/\rho g \ell D^2$ が $H/D < 1$ では h/H のみによって規定され、 H/D にはほとんど依存しないのに対して、 $H/D > 1$ では h/H および H/D

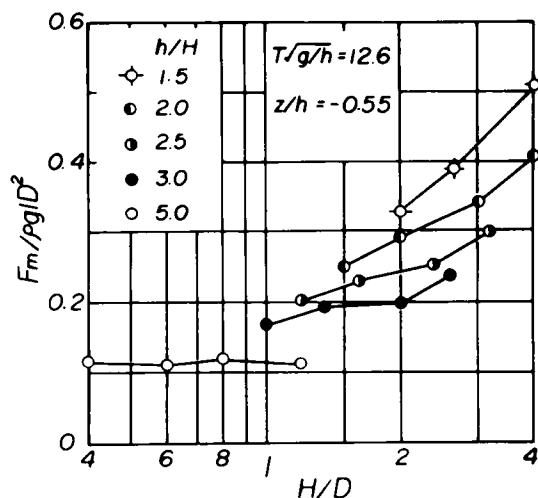


図-2.51 $F_m/\rho g \ell D^2$ の H/D による変化(1)
(水平円柱の場合)

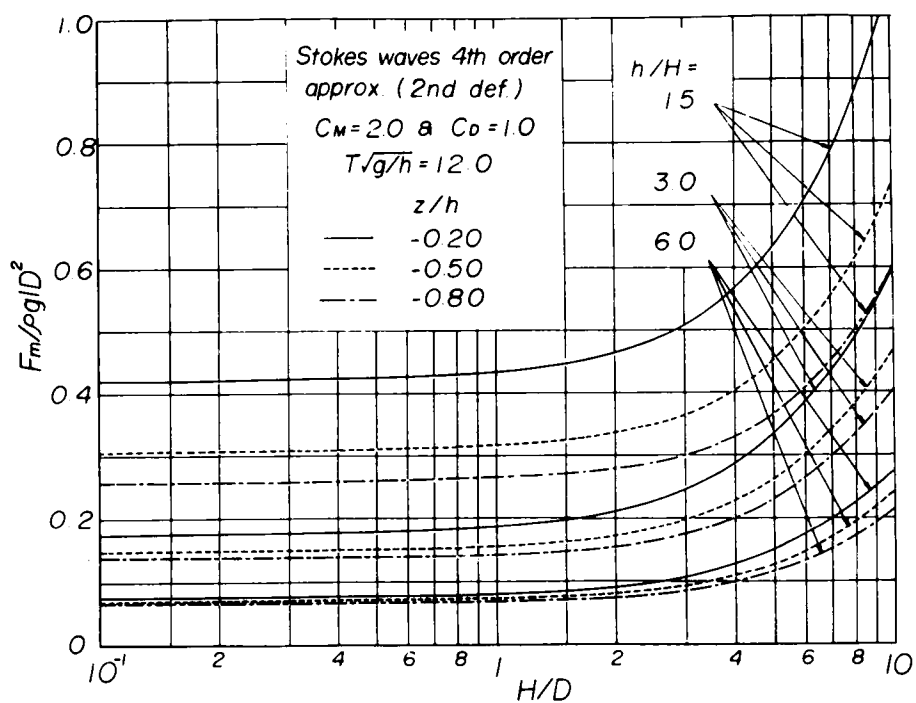


図-2.53 $F_m/\rho g I D^2$ の z/h による変化(2)(水平円柱の場合)

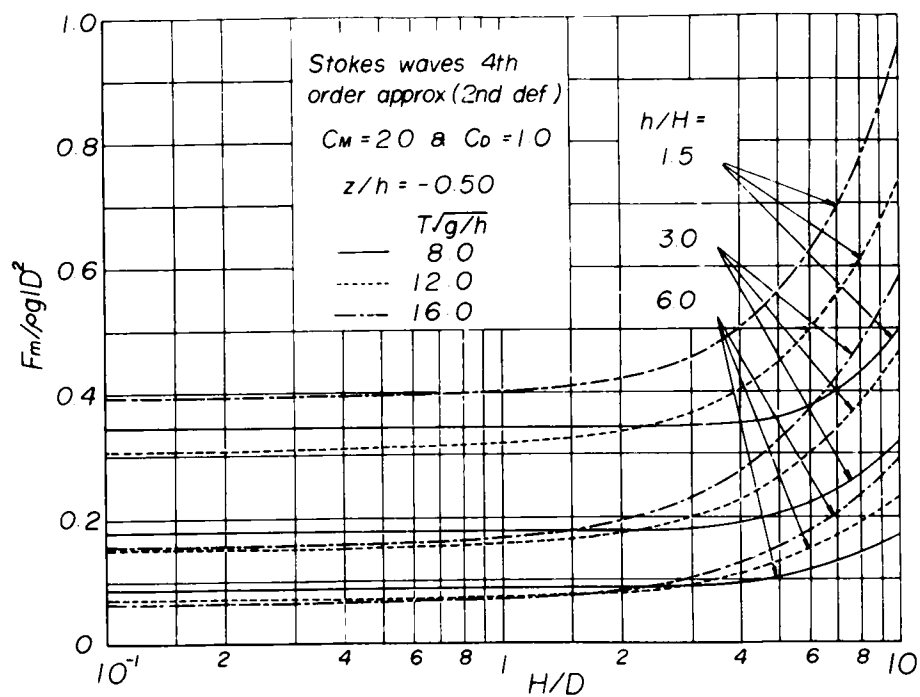


図-2.54 $F_m/\rho g I D^2$ の H/D による変化(2)(水平円柱の場合)

とともに単調に増加することや H/D および h/H がある値以下では $T\sqrt{g/h}$ とともに減少し、ある値以上では逆に増加するという次元解析結果と定性的にはよく一致している。また、鉛直円柱の場合の無次元全波力の最大値 $F_m/\rho g D^3$ は H/D の値の小さいとき、 h/H にほとんど関係しないのに対して、一方、水平円柱の場合の単位長さあたりの無次元波力の最大値 $F_m/\rho g \ell D^2$ は h/H に密接に関係づけられる。この相違は微小振幅波理論を用いた波力算定式の中の慣性力の表示から明らかなように、全波力の無次元化の仕方によるものである。

2.6.3 斜面上の鉛直円柱に作用する全波力の特性

海中構造物は比較的急こう配の海底にしばしば築造される。斜面上の波の理論には Friedrichs,⁵¹⁾ 岩垣および酒井,⁵²⁾ Mei ら⁵³⁾ および Lau ら⁵⁴⁾ などによる各種のものがあるが、それらの結果に基づく波力の推定法は理論上でもまた実用上からも必ずしも明確でない。さらに碎波力を含む波力の推定に関しては、一つの理論的な試みが合田⁵⁵⁾ によって示されているにすぎない。そこで、ここでは底こう配 1/30 の斜面上に設置された鉛直円柱に作用する全波力の実験結果に基づいてその特性を若干検討する。

(1) 全波力の水深による変化特性

図-2.55 は全波力の水深による変化特性を検討するために、ほぼ一定の H_0/L_0 (ここに、 H_0 : 沖波波高および L_0 : 沖波波長である) および H_0/D の値に対して碎波力をも含めた $F_m/\rho g D^3$ の h/H_0 による変化を示したものである。この図から $F_m/\rho g D^3$ の値は h/H_0 の値の減少とともに、急激に増大して碎波点近傍で最大値を示し、さらに h/H_0 の値が減少すれば、円柱設置位置より沖側で碎波するために、 $F_m/\rho g D^3$ の値がかえって減少することや $F_m/\rho g D^3$ の h/H_0 による変化の様子は H_0/L_0 や H_0/D によって著しく変化することがわかる。光易ら⁵⁶⁾ は底こう配 1/15 の斜面上における鉛直円柱に作用する碎波力に関する系統的な実験から図-2.55 と同様の図を示すとともに、無次元最大発生波力およびその発生水深が沖波波形こう配および底こう配との関係で与えられることを明らかにしている。

前述のように、斜面上に設置された鉛直円柱に作用する全波力は碎波現象を含むために、水深によって大きく変化するが、以下では最大波力発生水深より h/H_0 の値が大きい領域における非碎波の波による全波力の特性を一樣水深や緩こう配上における実験結果および理論結果と比較検討することによって明らかにする。

(2) 次元解析結果とその考察

図-2.56 は底こう配 1/30 の場合の無次元全波力の最大値 $F_m/\rho g D^3$ の $T\sqrt{g/h}$ による変化を示したものである。この図によれば、 $F_m/\rho g D^3$ は $H/D \leq 1.3$ で $h/H \geq 2.0$ では $T\sqrt{g/h}$ とともに単調に

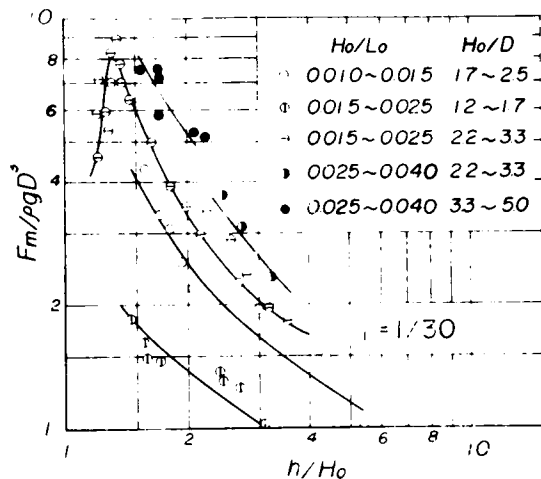


図-2.55 $F_m/\rho g D^3$ の h/H_0 による変化
(鉛直円柱で $i = 1/30$ の場合)

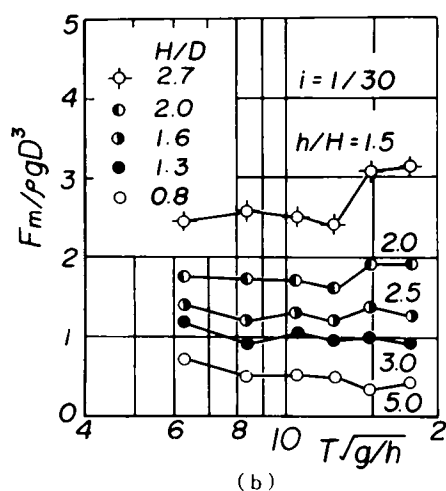
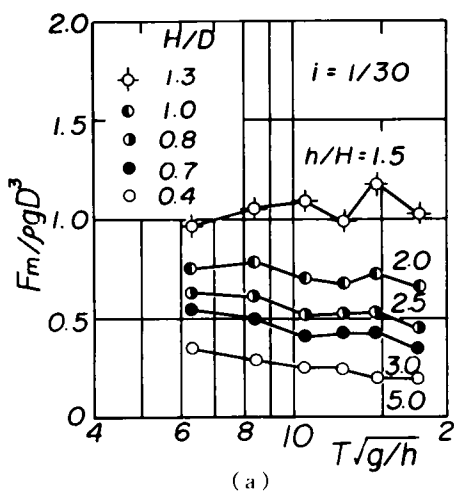


図-2.56 $F_m / \rho g D^3$ の $T \sqrt{g/h}$ による変化(鉛直円柱で $i = 1/30$ の場合)

減少するが、 $H/D > 1.3$ では h/H の値によって一度若干減少したのち増加するか、あるいは単調に増加する傾向を示す。この傾向は図-2.44 に示した底こう配 1/100 の場合の実験結果のそれと若干異なっており、 $F_m / \rho g D^3$ が $T \sqrt{g/h}$ とともに単調に減少する H/D および h/H の領域が底こう配 1/100 の場合に比べて広く、また増加する領域が狭くなっている。したがって、これらの図における波や円柱の特性がほぼ同一であるので、これは全波力に及ぼす底こう配の直接的な影響を表わすものと考えられる。

図-2.57(a)は図-2.45(a)と同様に、 $T \sqrt{g/h}$ および h/H の値を一定にした場合の $F_m / \rho g D^3$ と H/D との関係を示すものである。 $F_m / \rho g D^3$ は H/D とともに急激に増大し、 h/H の効果が見かけ上現われないのは底こう配 1/100 の場合の実験結果と同様である。しかし、これらの平均曲線の比較から明らかのように、 $H/D < 2.5$ では両者はほとんど一致しているのに対して、 $H/D > 2.5$ では底こう配 1/30 の場合の実験結果の方が 1/100 の場合より若干 H/D に伴う増加率が大きいことがわかる。図-2.57(b)は $T \sqrt{g/h}$ の影響を無視し、底こう配 1/30 の場合のすべての実験結果を h/H の適当な区間に分けて H/D との関係で示したものであって、

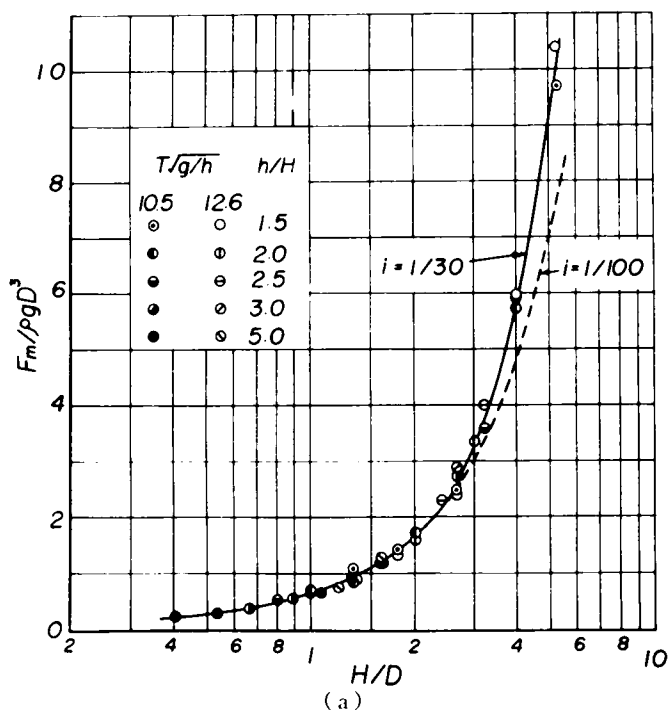


図-2.57

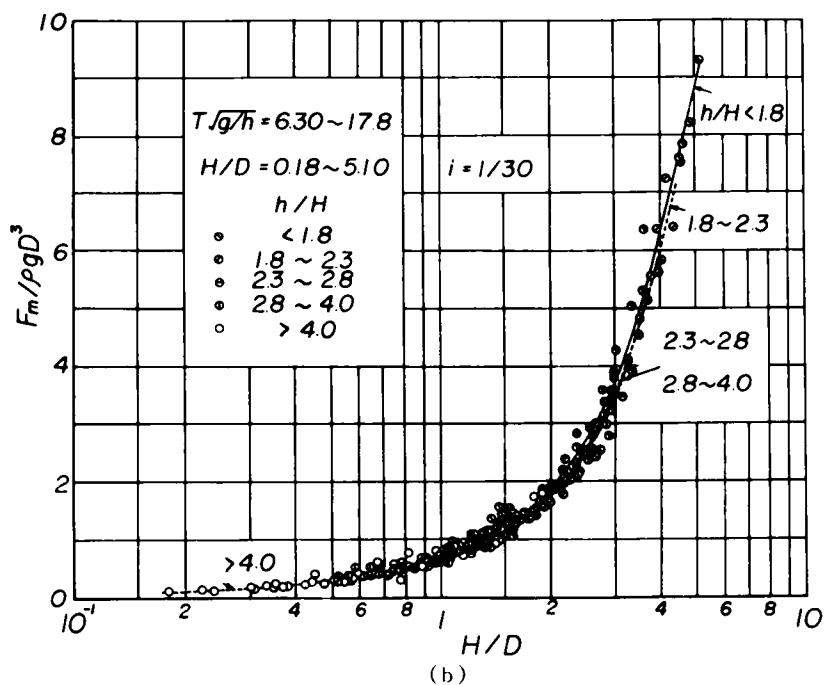


図-2.57 $F_m / \rho g D^3$ の H/D による変化 (鉛直円柱で $i = 1/30$ の場合)

h/H の値が小さいときほど、 $F_m / \rho g D^3$ の値に大きくなる傾向はあるが、この場合の h/H の影響は底こう配 $1/100$ の場合ほど大きくない。したがって、実験の範囲内で、底こう配 $1/30$ の $F_m / \rho g D^3$ は底こう配 $1/100$ の場合のそれに比べて無次元量 H/D とより密接に関連づけられて、 $T\sqrt{g/h}$ や h/H の効果は比較的小さいと考えられる。

(3) 波力算定式による理論結果との比較

図-2.58 は底こう配 $1/30$ の斜面上における波の静

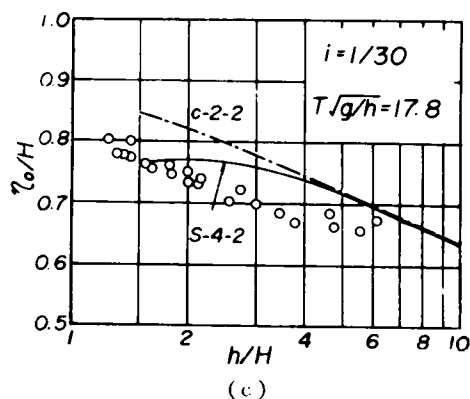
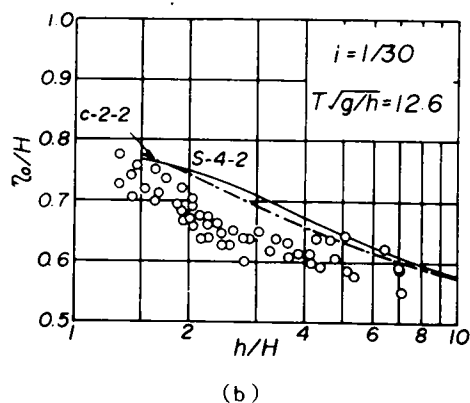
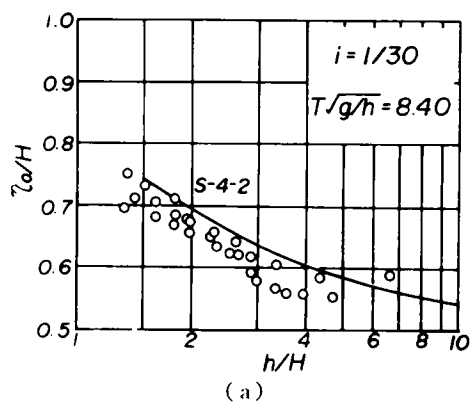


図-2.58 η_0/H の h/H による変化 ($i = 1/30$ の場合)

水面上の波の峯高 η_0/H の h/H による変化を一様水深での第2定義による Stokes 波およびクノイド波理論と比較したものである。これらの図によれば、実験結果は全体的に理論曲線より小さくなり、一様水深における有限振幅波理論では、急こう配の斜面上における波の静水面上の波の峯高を必ずしも十分な精度で推定できないことがわかる。図-2.59は図-2.6と同様に水底からの波の峯高 hc/h と H/h との関係を底こう配 $1/30$ の場合について示したものである。この図から明らかなように、 $T\sqrt{g/h}$ の影響は一様水深の場合ほど明確でなく、 hc/h は H/h との関係でよく表示される。またその平均曲線は一様水深あるいは緩こう配の場合のそれより小さい。つぎに、図-2.60は抗力係数および質量係数の値をそれぞれ $C_D = 1.0$ および $C_M = 2.0$ として第2定義による Stokes 波理論を用いた全波力の最大値に対する計算結果と底こう配 $1/30$ の場合の実験結果とを比較したものである。この図によれば、岩垣ら⁵⁷⁾の研究から明らかなように、急こう配の斜面上での波の水粒子速度は、斜面による反射やもどり流れのために、一様水深の場合とかなり様子を異にしているので、結果のばらつきの幅が一様水深の場合のそれに比べてかなり大きいけれども、計算結果は実験結果と比較的によく一致しているといえる。図-2.61は波や円柱の特性を考慮して図-2.20および2.26より両係数を決定した場合の計算結果と実験結果との比較を示したものであって、著者の計算方法によれば、両者の対応がより良好になり、

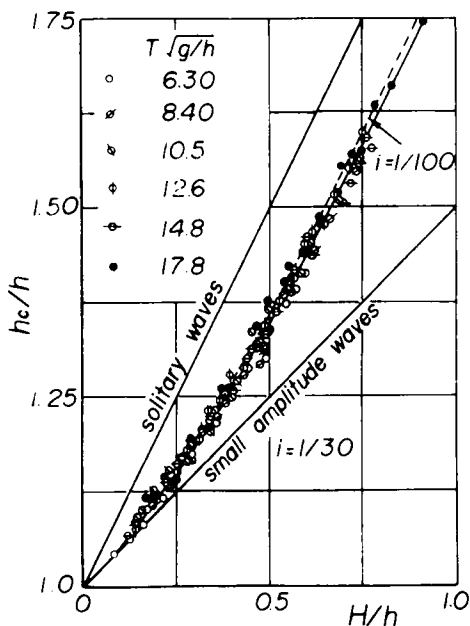


図-2.59 hc/h の H/h による変化
($i = 1/30$ の場合)

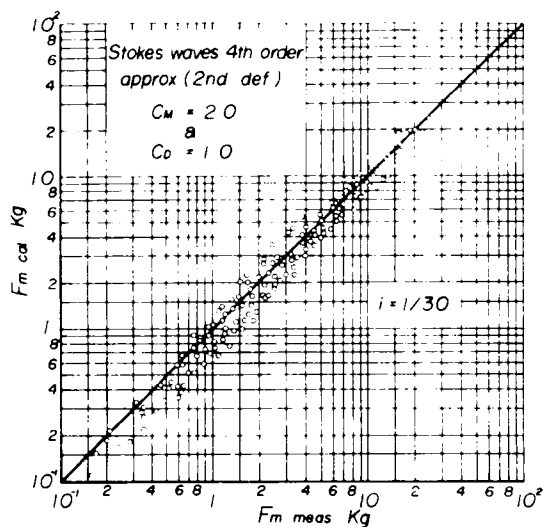


図-2.60 全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較(1)
(鉛直円柱で $i = 1/30$ の場合)

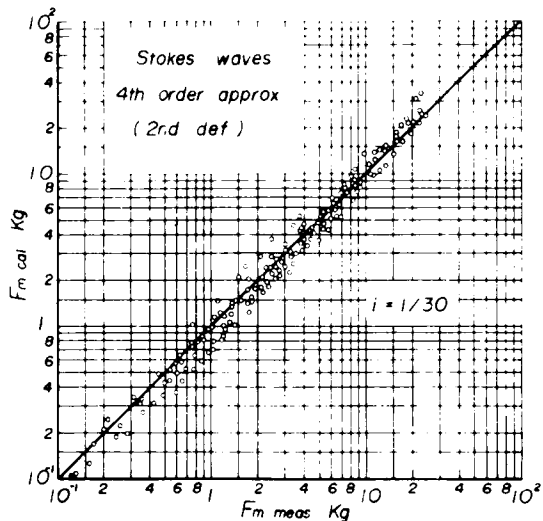


図-2.61 全波力の最大値に対する計算結果と実験結果との比較(2)
(鉛直円柱で $i = 1/30$ の場合)

ばらつきの幅も小さくなる。また、水位変動および全波力の時間的変化の数例を図-2.62に示す。全波

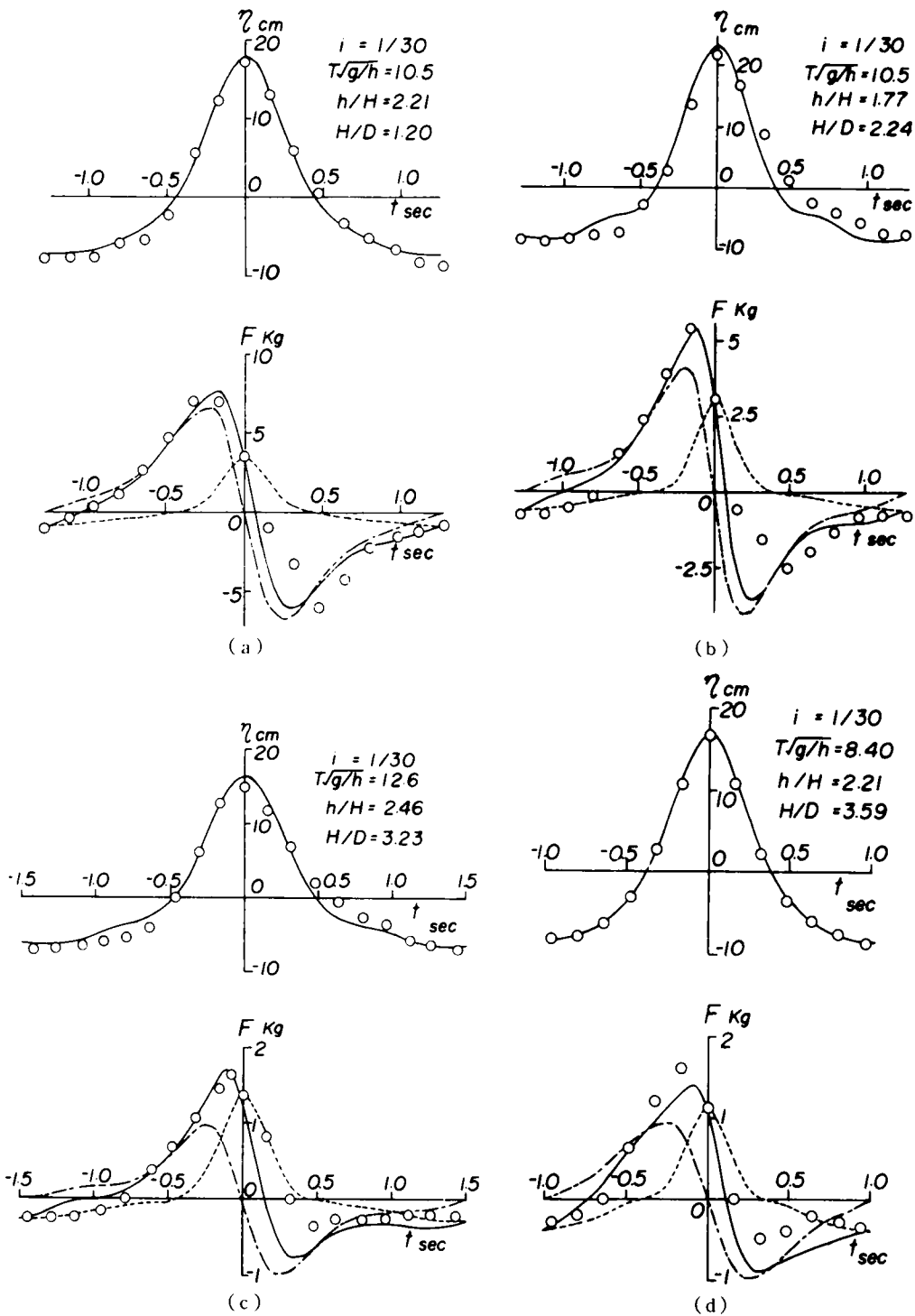


図-2.62 水位変動および全波力の時間的変化(鉛直円柱で $i = 1/30$ の場合)

力の時間波形は水位変動の時間波形と密接に関係しており、水位変動の時間波形が非対称であるけれども、一様水深での理論曲線に比較的近い時間軸の負側では、全波力についても対応がよい。しかし、時間軸の正側では斜面の影響のために、水位変動の時間波形の変化が理論曲線より緩やかになるので、全波力の時間波形にもそうした傾向が現われて、両者のへだたりが大きくなっている。

以上の考察から、若干推定の精度は悪くなるが、非碎波の波によって斜面上の鉛直円柱に作用する全波力は一様水深での有限振幅波理論を用いた波力算定式により近似的に評価できることがわかる。

2.7 結 語

以上、著者は2.においていわゆる柱体による波の回折効果を見捨てる場合の非碎波の波による剛な小口径柱体に作用する波力を適切に評価するための研究を実施し、若干の成果を得たので、各節ごとにその結果を要約すれば、つぎのとおりである。

2.1 では、小口径柱体に作用する波力に関する従来の研究成果を要約してその問題点を明らかにするとともに、2.での研究方法について述べた。

2.2 では、従来の有限振幅波理論では基礎方程式から波速が決定されず、そのため、波速に対する Stokes の第1および第2定義といわれる付加的な条件が必要であって、従来この点が明確にされていないことを指摘し、これまで第1定義によって計算されていた Stokes 波理論および Chappellear によるクノイド波理論を第2定義によって追計算した。そして波速の定義によって波速および水粒子速度は変化するが、水位変動はほとんど変化しないことを明らかにした。また、Laitone によるクノイド波の第2近似解は著者が計算した第2定義による Chappellear のクノイド波の第2近似解を水深・波高比 h/H の自乗の項まで考慮したより低次の解であることを解析的に明らかにした。つづいて、2.3 では波速、静水面上の波の峯高および水粒子速度に関する実験結果と従来の多くの有限振幅波理論を含めたこれらの理論計算結果との比較から、静水面上の波の峯高についてはそれぞれの適用限界に応じて有限振幅波理論との対応が比較的よいが、波速については第2定義による結果が第1定義によるものよりはるかによく一致することを明らかにした。また、波による水粒子速度は実験結果のばらつきのために、必ずしも明確でないが、全体的には第2定義による Stokes 波の第4次近似解と比較的よく一致することを示した。さらに、Laitone によるクノイド波理論によれば、 h/H の値が小さいとき、水平水粒子速度は鉛直方向に急激に増加し、実験結果とのへだたりがきわめて大きくなるのに対して、Chappellear によるクノイド波理論の水粒子速度の分布は実験結果とよく対応するが、その絶対値は若干大きくなり、しかもその傾向は第1定義による結果の方が著しいことも見出した。以上の結果から、一様水深における波の特性を評価するためには、むしろ第2定義による有限振幅波理論がより妥当であり、とくに第2定義による Stokes 波の第4次近似解は波速に対しては $T\sqrt{g}/h < 12$ (ただし $h/H > 2.8$) でもっとも適合性がよいことを確かめた。

2.4 では Morison の波力算定式に第2定義による Stokes 波理論およびクノイド波理論を導入し、柱体に作用する全波力を算定するための有限振幅波理論による基礎式を誘導した。

2.5 ではこれらの理論に基づいて抗力係数および質量係数を算出する方法について述べた。ついで、鉛直円柱、鉛直角柱および水平円柱に作用する全波力の実験結果から、これら両係数を推定し、波や柱体の特

性との関連を検討した結果、柱体の抗力係数は一定の柱体形状に対しては、Reynolds 数のみでなく、波動運動の非定常性の効果を表わす Keulegan-Carpenter 数の関数となり、同一の Reynolds 数に対して Keulegan-Carpenter 数の大きいほど、その値が小さくなることを見出した。しかし、水平円柱の場合には、いわゆる proximity effect や鉛直水粒子速度による水平方向の揚力および水粒子速度のこう配の影響をうけるので、水平水粒子速度を用いて算出された抗力係数は鉛直円柱の場合に比べて若干大きくなることがわかった。一方、鉛直柱体の質量係数は波高と柱体の特性長との比 H/D の値の増加とともに若干減少する傾向があり、水平円柱の質量係数は H/D のみでなく、円柱の設置水深 z/h の影響や proximity effect をうけることが明らかになった。また両係数の位相変化は全波力の時間波形にそれほど影響しないと考えられた。

2.6 では波や柱体の特性との関係から決定された抗力係数および質量係数を用いた有限振幅波理論による全波力の計算結果は、鉛直角柱に対しては 15～20% 小さいが、鉛直円柱および proximity effect が無視される場合の水平円柱に対しては実験結果とよく一致することがわかった。

つぎに、鉛直柱体に作用する無次元全波力の最大値 $F_m/\rho g D^3$ は実験の範囲内では H/D と密接に関連づけられるのに対して、一方、両係数を一定とした理論結果では H/D のほか $T\sqrt{g/h}$ および h/H の影響が無視できないことを示した。このことは実験条件の制約にもよるが、これらの無次元量が抗力係数および質量係数との関係で、全波力に及ぼす影響を相殺する方向に作用しているためであると考えられた。また、水平円柱に作用する単位長さあたりの波力の最大値に対する実験結果 $F_m/\rho g \ell D^2$ は主として H/D および h/H に依存しており、 $T\sqrt{g/h}$ や z/h によってそれほど変化せず、とくに後者の傾向は両係数を一定とした理論計算では全く説明できないことを示した。

最後に、底こう配 1/30 の斜面上での鉛直円柱に作用する全波力の特性について若干の考察を加えた。その結果、まず斜面上に設置された鉛直円柱に作用する全波力は碎波現象を含むために水深によって大きく変化し、碎波点近傍で最大になることを示した。つぎに、非碎波の波による全波力の実験結果の次元解析から、無次元全波力の最大値 $F_m/\rho g D^3$ の $T\sqrt{g/h}$ および h/H による変化特性は底こう配 1/100 の場合と若干異なるが、無次元量 H/D とより密接に関連づけられることを明らかにするとともに、 $H/D < 2.5$ の範囲では両者はほぼ一致するのに対して、 $H/D > 2.5$ では底こう配 1/30 の場合の方が 1/100 の場合より若干大きくなることを見出した。さらに、第 2 定義による Stokes 波の第 4 次近似解を用いた波力算定式による全波力の計算結果と底こう配 1/30 の場合の実験結果との対応は、一樣水深および緩こう配の場合のそれに比べて、若干悪くなるけれども、実験の範囲内では両者は比較的よく一致することがわかった。

参 考 文 献

- 1) Morison, J. R.: Design of Piling, Proc. 1st Conf. on Coastal Eng., 1951, pp.254~258.
- 2) Morison, J. R., Johnson, J. W. and O'Brien, M. P.: Experimental Studies of Forces on Piles, Proc. 4th Conf. on Coastal Eng., 1953, pp.340~370.
- 3) Dean, R. G.: Stream Function Representation of Nonlinear Ocean Waves, Jour. Geophys. Res.,

- Vol.70, No.18, 1965, pp.4561~4572.
- 4) Chappellear, J. E. : Direct Numerical Calculation of Wave Propagation, Jour. Geophys. Res., Vol.66, No.2, 1961, pp.501~508.
 - 5) Le Méhauté, B., Divoky, D. and Lin, A. : Shallow Water Waves ; A Comparison of Theories and Experiments, Proc. 11th Conf. on Coastal Eng., 1968, pp.87~101.
 - 6) 岩垣雄一・酒井哲郎：有限振幅波の水粒子速度に関する実験，第16回海岸工学講演会講演集，1969，pp.15~74.
 - 7) Goda, Y. : Wave Forces on a Vertical Circular Cylinder ; Experiments and a Proposed Method of Wave Force Computation, Report Port and Harbour Tech. Res. Inst., No.8, 1964, pp.1~74.
 - 8) Reid, R. O. and Bretschneider, C. L. : Surface Waves and Offshore Structure ; The Design Wave in Deep or Shallow Water, Storm Tide and Forces on Vertical Piles and Large Submerged Objects, Tech. Report, Texas A. & M. Research Foundation, 1953.
 - 9) Harleman, D. R. F. and Shapiro, W. C. : Experimental and Analytical Studies of Wave Forces on Offshore Structure, Part 1, MIT Hydrodynamics Laboratory, Tech. Report, No.19, 1955, pp.1~55.
 - 10) 野田英明：円柱に作用する波力に関する研究，京大工業教員養成所研究報告，第1号，1964，pp.59~65.
 - 11) Agershou, H. A. and Edens, J. J. : Fifth and First Order Wave Force Coefficients for Cylindrical Piles, Coastal Eng., Santa Barbara Specialty Conf., 1965, pp.219~248.
 - 12) Evans, D. J. : Analysis of Wave Force Data, O. T. C. Conf., Paper No.1005, 1969, pp.1-51~1-70.
 - 13) Aagaard, P. M. and Dean, R. G. : Wave Forces ; Data Analysis and Engineering Calculation Method, O. T. C. Conf., Paper No.1008, 1969, pp.1-95~1-106.
 - 14) 前出の7)
 - 15) 樋口明生：円柱に及ぼす波力の実験的研究，京大防災研年報，第1号，1957，pp.128~137.
 - 16) Keulegan, G. H. and Carpenter, L. H. : Forces on Cylinders and Plates in an Oscillating Fluid, Jour. Res. N. B. S., Vol.60, No.5, 1958, pp.423~440.
 - 17) Wilson, B. W. and Reid, R. O. : A Discussion of " Wave Force Coefficients for Offshore Pipelines." Proc. ASCE, WWI, 1963, pp.61~65.
 - 18) Wiegel, R. L., Beebe, K. E. and Moon, J. : Ocean Wave Forces on Circular Cylindrical Piles, Proc. ASCE, HY2, Vol.83, No.1199, 1957, pp.89~119.
 - 19) Ross, C. W. : Large-Scale Tests of Wave Forces on Piling, BEB Tech. Memo., No.111, 1959, pp.1~9.
 - 20) Blumberg, R. and Rigg, A. M. : Hydrodynamic Drag at Super-Critical Reynolds Numbers, Paper Presented at ASME Meeting, Petroleum Session, 1961.

- 21) Burton, W. J. and R. M. Sorensen : The Effects of Surface Roughness on the Wave Forces on a Circular Cylindrical Pile, Texas A. & M. Univ., COE Report, No.121, 1970, pp.1~37.
- 22) Laird, A. D. K., Johnson, C. A. and Walker, R. W. : Water Forces on Accelerated Cylinders, Proc. ASCE, WW1, No.1982, 1959, pp.99~119.
- 23) Sarpkaya, T. and Garrison, C. J. : Vortex Formation and Resistance in Unsteady Flow, Jour. Applied Mech., Vol.30, No.1, 1963, pp.16~24.
- 24) MacNown, J. S. and Keulegan, G. H. : Vortex Formation and Resistance in Periodic Motion, Proc. ASCE, Vol.85, No.1894, 1959, pp.1~6.
- 25) Bidde, D. D. : Wave Forces on a Circular Pile Due to Eddy Shedding, Univ. of California, Berkeley, Hydraulic Eng. Laboratory, Tech. Report, HEL 9-16, 1970, pp.1~141.
- 26) Jen, Y. : Wave Forces on Circular Cylindrical Piles Used in Coastal Structure, Univ. of California, Berkeley, Hydraulic Eng. Laboratory, Tech. Report, HEL 9-11, 1967, pp.1~94.
- 27) Paape, A. and Breusers, H. N. C. : The Influence of Pile Dimension on Forces Exerted by Waves, Proc. 11th Conf. on Coastal Eng., 1968, pp.840~849.
- 28) 堀川清司・渡辺 晃・勝井秀博 : 円柱に作用する碎波力に関する研究, 第20回海岸工学講演会論文集, 1973, pp.37~42.
- 29) Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. A. : Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., 1960, pp.184~197.
- 30) Skjelbreia, L. : Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp.1~337.
- 31) Tanaka, K. : On the Sea Waves, Technology Report of Osaka University, Vol.13, No.65, 1953, pp. 113~116.
- 32) De, S. C. : Contributions to the Theory of Stokes Waves, Proc. Cambridge Phil. Soc., No.51, 1955, pp.713~736.
- 33) Bretschneider, C. L. : A Theory for Waves of Finite Height, Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., 1960, pp.146~183.
- 34) Chapplear, J. E. : Shallow-Water Waves, Jour. Geophys. Res., Vol.67, No.12, 1962, pp.4693~4704.
- 35) Keulegan, G. H. and Patterson, G. H. : Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves, Jour. Res. N. B. S., Vol. 24, 1940, pp.47~101.
- 36) Laitone, E. V. : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. Fluid Mech., Vol.9, 1961, pp.430~444.
- 37) Le Méhauté : Mass Transport in Cnoidal Waves, Jour. Geophys. Res., Vol.73, No.18, 1968, pp.5973~5979.
- 38) Stokes, G. G. : On the Theory of Oscillatory Waves, Math. Phys. Paper, Vol.8, 1880,

pp.197~229.

39) 前出の 28)

40) 佐伯 浩・泉 冽：有限振幅浅水波の高次近似理論について，第 16 回海岸工学講演会講演集，1969，pp.1~6.

41) 岩垣雄一・酒井哲郎：クノイド波に関する研究（第 10 報）——総括と今後の展望——，京大防災研年報，第 15 号 B，1972，pp.405~416.

42) Laitone, E. V. : Series Solutions for Shallow Water Waves, Jour. Geophys. Res., Vol.70, No.4, 1965, pp.995~998.

43) 前出の 7)

44) Dean, R. G. and Harleman, D. R. F. : Interaction of Structures and Waves, Estuary and Coastline Hydrodynamics Edited by A. T. Ippen, Macgraw-Hill, 1968, pp.341~403.

45) 亀井 勇・松下清夫・和泉正哲：建築学大系 20，建築耐風・耐雪論，彰国社，1973，pp.149~150.

46) 前出の 2)

47) Hoerner, S. F. : Fluid Dynamic Drag, Chapter III-Pressure Drag, 1965, pp.3-1~3-28.

48) Miasch, F. D. and Moore, W. L. : Drag Forces in Velocity Gradient Flow, Proc. ASCE, HY7, Vol.86, 1960, pp.1~11.

49) 前出の 16)

50) Riabouchinski, P. : Sur la Résistance des Fluids, Int. Cong. Math., 1920, pp.568~585.

51) Friedrichs, K. O. : Water Waves on a Shallow Sloping Beach, Commun. on Pure and Appl. Math., Vol.1, 1948, pp.109~134.

52) Iwagaki, Y. and Sakai, T. : Shoaling of Finite Amplitude Waves on a Beach of Constant Slope, Proc. 13th Conf. on Coastal Eng, Vol.1, 1972, pp.347~364.

53) Mei, C. C. and Le Méhauté, B. : Note on the Equations of Long Waves over an Uneven Bottom, Jour. Geophys. Res., Vol.71, No.2, 1966, pp.393~399.

54) Lau, J. and Travis, B. : Slowly Varying Stokes Waves and Submarine Longshore Bars, Jour. Geophys. Res., Vol.78, No.21, 1973, pp.4483~4497.

55) 合田良実・原中祐人・北畑正記：直柱に働く衝撃碎波力の研究，港湾技術研究所報告，第 5 卷，第 4 号，1972，pp.1~30.

56) 光易 恒・本多忠夫：円柱に作用する碎波の波力，第 20 回海岸工学講演会論文集，1973，pp.43~47.

57) 岩垣雄一・酒井哲郎・川島 毅：斜面上の波の水粒子速度の鉛直分布について，第 18 回海岸工学講演会論文集，1971，pp.93~96.

3. 大口径円柱に作用する波圧・波力に関する研究

3.1 概 説

円柱に作用する波力は、円柱の径が波長に比べて小さい場合、2.で検討したように、通常円柱による波の変形を無視して、Morison以来抗力と慣性力の線型和として表わされているが、円柱の径が波長に比較しうる大きさになると、上述の仮定が不適当になり、波力を計算する場合、円柱による波の変形の影響を無視できなくなる。この問題は、水の粘性を無視したポテンシャル流理論では円柱による波の回折問題として取り扱われ、Lamb¹⁾、Wiener, Havelock²⁾、MacCamyおよびFucks³⁾、Reid, Bonnefille および Germain⁴⁾、Laird⁵⁾らによって計算や実験が行なわれてきた。

円柱による回折問題は、LambおよびWienerにより述べられているように、光学や音響学で扱われたものであるが、波動運動の場合にも若干の変形をすれば、この理論が成立することを指摘したのはHavelockやMacCamyおよびFucksである。MacCamyおよびFucksは浅海域における円柱による波の回折理論の解を導くとともに、円柱周囲の波圧分布式を積分することにより大口径の円柱に作用する全波力および全モーメントを計算した。この式は微小振幅波理論に基づくものであるから、静水面上の波圧分布については考慮されておらず、波高が大きい場合に妥当であるか疑問である。またかれらは、この式を改良して静水面上の波圧分布を考慮しているが、静水面上の波の高さに進行波としての微小振幅波理論を用いているために、補正の方法に若干問題があると思われる。つぎに、ReidはMacCamyらの全波力式から質量係数を求め、円柱の径と波長との比 D/L の値が小さいときは質量係数は $C_M = 2$ にほぼ近い値を与えるが、 D/L の値が増大するとともに、急激に質量係数が減少することを示し、波による円柱の回折効果を考慮しなければならない D/L の値を 0.1 としている。

Lairdは大口径の円柱に作用する波圧分布および円柱周辺の水位変動に関する若干の実験を行ない、WienerおよびMacCamyらの理論解との比較より、鉛直波圧分布の実験結果はMacCamyらの与えた双曲線関数よりかなり急激に水底に向って減少することを示したが、後述するように、この結果の妥当性は疑わしいように思われる。

BonnefilleおよびGermainは、円柱周辺の水位変動および全波力についての実験を行ない、理論解との比較より円柱周辺の水位変動の実験結果は理論曲線よりかなり大きくなることを示すとともに、全波力について簡単な半理論式を与えているが、詳細は不明である。また、最近ではWang⁶⁾によって波と流れが共存する場合の大口径の円柱に作用する波力の問題が実験的に扱われているが、回折波理論による理論解はあまり実験結果と対応せず、次元解析的に全波力の算定式が与えられているにすぎない。

一方、わが国においては古く田中⁷⁾によって円形島周囲の波高分布を表わす理論解が求められており、さらに最近では複数本の鉛直円柱に作用する波力の理論解が大楠⁸⁾によって計算されている。また、波圧の分布特性に関する大規模な実験および観測がそれぞれ永井⁹⁾および橋本¹⁰⁾により、全波力に関する実験が中村^{11), 12)}および堀川¹³⁾により行なわれてきた。しかし、永井らの実験結果は重複波の波

圧の理論解と比較されているだけであるので、回折波理論の適用性を検討するに至っていない。さらに中村らのものは試験円柱に突出部があり、また取水口や天端から水の出入がある。堀川らのものは2で述べたように、底こう配 $1/30$ の斜面におけるものである。したがって、いずれも理論の仮定を必ずしも満足した実験ではないように考えられる。

ところで、これらの研究はすべて微小振幅波理論である線型回折波理論に基づくものであるが、大口径円柱に作用する波圧・波力をより適確に評価するためには、波の有限振幅の影響を考慮する必要がある。

こうした波の非線型性を回折波理論に導入しようとする試みは最近 Chakrabarti¹⁴⁾ によって行なわれた。かれは入射波を有限振幅波理論である Stokes 波の第5次近似解で表示し、それぞれの周波数成分に対して、線型回折波理論を適用して円柱壁での境界条件を満足する解を誘導した。しかし、この近似理論は水面における非線型境界条件である運動学的および力学的条件を微小振幅波理論に相当する1次項以外は全く満足しておらず、理論の適合性についてはかなりの問題があるといわねばならない。

以上述べたように、大口径円柱に作用する波圧・波力については系統的な研究が少なく、必ずしも十分な成果が得られていないと考えられる。そこでここでは大口径円柱に作用する波圧・波力を解明するために、つぎのような研究を実施する。まず、3.2ではせつ動法を用いて水位変動および波圧に対する非線型回折波理論の第2次近似解を誘導し、3.3ではそれらより全波力の表示式を求め、波の非線型性が全波力に及ぼす影響を理論的に考察するとともに、円柱の質量係数と波や円柱の特性との関連を検討する。つぎに、3.4および3.5では水位変動、波圧および全波力に関する実験を行ない、前述した理論結果と実験結果との比較より回折波理論の適用性、とくに、波の非線型性の効果を詳細に検討し、この立場から大口径円柱に作用する波圧・波力の推定法を考察することにする。

3.2 非線型回折波理論

3.2.1 基礎方程式

いま、非粘性非回転の流体運動とし、図-3.1のような極座標 (r, θ, z) を用い、次式による無次元量

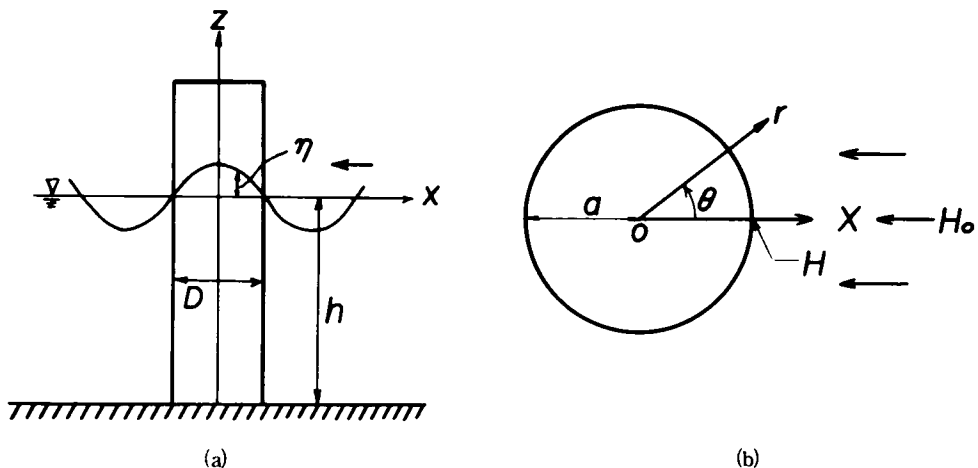


図-3.1 座標系

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{k^2 \phi}{\lambda \sqrt{k g}}, & \bar{r} &= k r, & \bar{z} &= k z, & \bar{\eta} &= \frac{k \eta}{\lambda} \\ \bar{a} &= k a, & \bar{h} &= k h, & \bar{t} &= \sigma t, & \omega &= \frac{\sigma}{\sqrt{k g}} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

を定義すれば、一様水深における円柱周辺の波動運動を規定する基礎方程式および境界条件はつぎのように与えられる。ここに、 ϕ ：速度ポテンシャル、 $k = 2\pi/L$ ：波数、 η ：静水面からの水位変動、 h ：水深、 $\sigma = 2\pi/T$ ：角周波数、 T ：周期、 a ：円柱の半径、 g ：重力の加速度、 λ ：微小なパラメーター、 z ：静水面より鉛直上方にとった座標および t ：時間である。

まず、基礎方程式である連続方程式は、

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{\theta}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (3.2)$$

となり、水底および円柱壁面における境界条件はそれぞれ次式で表わされる。

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = -\bar{h} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad ; \quad \bar{r} = \bar{a} \quad (3.4)$$

また、水面における運動学的および力学的条件は、それぞれ次式となる。

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} - \omega \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} - \lambda \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{r}} - \frac{\lambda}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{\theta}} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \quad (3.5)$$

$$\omega \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} + \bar{\eta} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \quad (3.6)$$

ただし、力学的条件に含まれる Bernoulli の定数項は式 (3.6) の左辺第 1 項に含められている。

さらに、解の性質として、 \bar{r} が無限大になるにつれて、円柱による回折波が消滅することを示すいわゆる radiation condition が必要とされるが、円柱からの回折波を表わす無次元化された速度ポテンシャルを $\bar{\psi}$ とすれば、それは次式で与えられる。

$$\bar{\psi} = O(\bar{r}^{-1/2}), \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}} + i \bar{\psi} = o(\bar{r}^{-1/2}) \quad ; \quad \bar{r} \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

ここに、 $O(r^T)$ は $r \rightarrow \infty$ のとき x/r^T が有界であるような量 x を表わし、 $o(r^T)$ は $r \rightarrow \infty$ のとき $x/r^T \rightarrow 0$ となるような量 x を表わすものとする。

さて、以上の基礎方程式の厳密解を得ることはきわめて困難であるが、微小なパラメーター λ が含まれ

ているので、近似解を求めるためにせつ動法が適用できる。すなわち、 $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\eta}$ および ω が λ のべきで次式のように展開できるものとする。

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 + \lambda \bar{\phi}_1 + \dots\dots \\ \bar{\psi} &= \bar{\psi}_0 + \lambda \bar{\psi}_1 + \dots\dots \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}_0 + \lambda \bar{\eta}_1 + \dots\dots \\ \omega &= \omega_0 + \lambda \omega_1 + \dots\dots\end{aligned}\quad \left. \vphantom{\begin{aligned}\bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 + \lambda \bar{\phi}_1 + \dots\dots \\ \bar{\psi} &= \bar{\psi}_0 + \lambda \bar{\psi}_1 + \dots\dots \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}_0 + \lambda \bar{\eta}_1 + \dots\dots \\ \omega &= \omega_0 + \lambda \omega_1 + \dots\dots\end{aligned}} \right\} \quad (3.8)$$

また、式(3.8)の $\bar{z} = \lambda \bar{\eta}$ における $\bar{\phi}$ を $\bar{z} = 0$ のまわりに

$$\bar{\phi}(\bar{r}, \theta, \lambda \bar{\eta}, \bar{t}) = \bar{\phi}_0(\bar{r}, \theta, 0, \bar{t}) + \lambda \left\{ \bar{\eta}_0 \frac{\partial \bar{\phi}_0(\bar{r}, \theta, 0, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi}_1(\bar{r}, \theta, 0, \bar{t}) \right\} + \dots\dots \quad (3.9)$$

で展開できるものとする。

つぎに、式(3.8)および(3.9)を式(3.1)～(3.7)に代入し、 λ のべきについて整理すると、第1次および第2次近似解を求めるための基礎方程式および境界条件はそれぞれ次式で表わされる。すなわち、 λ に独立な項に対して、

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = -\bar{h} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} = 0 \quad ; \quad \bar{r} = \bar{a} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} - \omega_0 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = 0 \quad (3.13)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{\eta}_0 = 0 \quad ; \quad \bar{z} = 0 \quad (3.14)$$

$$\bar{\psi}_0 = O(\bar{r}^{-1/2}), \quad \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{r}} + i \bar{\psi}_0 = o(\bar{r}^{-1/2}) \quad ; \quad \bar{r} \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

となり、また同様に λ の項としてつぎの諸式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = -\bar{h} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{r}} = 0 \quad ; \quad \bar{r} = \bar{a} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} - \omega_0 \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{\eta}_0 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}^2} - \omega_1 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = 0 \quad (3.19)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{\eta}_1 + \omega_0 \bar{\eta}_0 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}^2} + \omega_1 \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = 0 \quad (3.20)$$

$$\bar{\psi}_1 = O(\bar{r}^{-1/2}), \quad \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{r}} + i \bar{\psi}_1 = o(\bar{r}^{-1/2}) \quad ; \quad \bar{r} \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

さらに、式(3.13)および(3.14)と式(3.19)および(3.20)からそれぞれ $\bar{\eta}_0$ および $\bar{\eta}_1$ を消去すると、次式になる。

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} = 0 \quad ; \quad \bar{z} = 0 \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{t}^2} &= \omega_1 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} - \omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} - \bar{\eta}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} \right) \\ &\quad - \omega_0 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} \quad ; \quad \bar{z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

3.2.2 第1次近似解

式(3.10)～(3.12)と式(3.15)および(3.22)を満足する第1次近似解は、すでに MacCamy および Fucks によって求められており、 $\bar{\phi}_0$ 、 $\bar{\eta}_0$ および ω_0 はそれぞれ次式で表わされる。

$$\bar{\phi}_0 = -\omega_0 \frac{\cosh(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh \bar{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^{n+1} \left\{ J_n(\bar{r}) - \frac{J'_n(\bar{a})}{H_n^{(2)'}(\bar{a})} H_n^{(2)}(\bar{r}) \right\} \cos n\theta e^{i\bar{t}} \quad (3.24)$$

$$\bar{\eta}_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^n \left\{ J_n(\bar{r}) - \frac{J'_n(\bar{a})}{H_n^{(2)'}(\bar{a})} H_n^{(2)}(\bar{r}) \right\} \cos n\theta e^{i\bar{t}} \quad (3.25)$$

$$\omega_0^2 = \tanh \bar{h} \quad (3.26)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$ 、 δ_n ：Neumann 数 ($n=0$ なら $\delta_0=1$ 、 $n \geq 1$ なら $\delta_n=2$)、 J_n ：第1種 Bessel 関数、 $H_n^{(2)}$ ：第2種 Hankel 関数および“'”： \bar{r} に関する微分を表わす。

式(3.24)および(3.25)の第1項は周知の微小振幅進行波の Bessel 関数表示であり、第2項は円柱からの回折波を示し、 $\bar{r} \rightarrow \infty$ につれて消滅する $\bar{\psi}_0$ に相当する項である。式(3.26)は通常の波の分散の関係と一致する。

また、微小なパラメーター λ は第1次近似解に対して H_0 を λ 射波高とすると、次式で表わされる。

$$\lambda = \frac{kH_0}{2} \quad (3.27)$$

さて、式(3.24)および(3.25)は複素表示であるが、第2次近似解を求める計算の都合上実数表示に変換すると、それぞれ次式になる。

$$\bar{\phi}_0 = -\omega_0 \frac{\cosh(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh \bar{h}} (L_1 \cos \bar{t} - M_1 \sin \bar{t}) \quad (3.28)$$

$$\bar{\eta}_0 = -L_1 \sin \bar{t} - M_1 \cos \bar{t} \quad (3.29)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{ Y'_n(\bar{a}) J_n(\bar{r}) - J'_n(\bar{a}) Y_n(\bar{r}) \} \cos n\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta \\ M_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \{ Y'_n(\bar{a}) J_n(\bar{r}) - J'_n(\bar{a}) Y_n(\bar{r}) \} \cos n\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\theta \\ a_{2m} &= \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m} J'_{2m}(\bar{a})}{J'^2_{2m}(\bar{a}) + Y'^2_{2m}(\bar{a})}, \quad a_{2m+1} = \frac{(-1)^{m+1} \delta_{2m+1} Y'_{2m+1}(\bar{a})}{J'^2_{2m+1}(\bar{a}) + Y'^2_{2m+1}(\bar{a})} \\ b_{2m} &= \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m} Y'_{2m}(\bar{a})}{J'^2_{2m}(\bar{a}) + Y'^2_{2m}(\bar{a})}, \quad b_{2m+1} = \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m+1} J'_{2m+1}(\bar{a})}{J'^2_{2m+1}(\bar{a}) + Y'^2_{2m+1}(\bar{a})} \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

および Y_n : 第2種 Bessel 関数である。

さらに、無次元圧力 $\bar{p} = kp/\rho g$ を

$$\bar{p} = -\bar{z} + \lambda \bar{p}_0 + \lambda^2 \bar{p}_1 + \dots \quad (3.31)$$

とすれば、第1次近似解に対しては、次式のようになる。

$$\bar{p}_0 = \omega_0 \frac{\cosh(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh \bar{h}} (-L_1 \sin \bar{t} - M_1 \cos \bar{t}) \quad (3.32)$$

また、円柱壁面での水位変動および波圧は $\bar{r} = \bar{a}$ として、

$$Y'_n(\bar{a}) J_n(\bar{a}) - J'_n(\bar{a}) Y_n(\bar{a}) = \frac{2}{\pi \bar{a}} \quad (3.33)$$

の関係を用い、式(3.27)を考慮すれば、つぎのように表示される。

$$\frac{\eta}{H_0} = \frac{1}{\pi k a} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \sin \sigma t - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta \cos \sigma t \right) \quad (3.34)$$

$$\frac{p}{\rho g H_0} = \frac{\cosh k(h+z)}{\pi k a \sinh k h} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \sin \sigma t - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta \cos \sigma t \right) - \frac{z}{H_0} \quad (3.35)$$

さらに、分散を表わす関係は次式になる。

$$\sigma^2 = g k \tanh k h \quad (3.36)$$

3.2.3 第2次近似解

まず、第1次近似解を用いて、式(3.23)の右辺を計算すれば、次式になる。

$$\left. \begin{aligned} & \omega_1 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} - \omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} - \bar{\eta}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} \right) - \omega_0 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} = -2\omega_1 L_1 \cos \bar{t} + 2\omega_1 M_1 \sin \bar{t} - \frac{\omega_0}{\sinh \bar{h} \cosh \bar{h}} \\ & \quad \left[\left\{ 2 \cosh^2 \bar{h} M_{1r} L_{1r} + 2 \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 \cosh^2 \bar{h} M_{1\theta} L_{1\theta} + (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) M_1 L_1 \right\} \right. \\ & \quad \left. \cos 2\bar{t} - \left\{ \cosh^2 \bar{h} (M_{1r}^2 - L_{1r}^2) + \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 \cosh^2 \bar{h} (M_{1\theta}^2 - L_{1\theta}^2) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(2 \cosh^2 \bar{h} - 3)}{2} (M_1^2 - L_1^2) \right\} \sin 2\bar{t}] ; \quad \bar{z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} L_{1r} &= \frac{\partial L_1}{\partial \bar{r}}, \quad M_{1r} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{r}}, \quad L_{1\theta} = \frac{\partial L_1}{\partial \theta}, \quad M_{1\theta} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta} \\ L_1^2 &= \frac{1}{2} (A_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} A_i A_j - A_{m/2}^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n A_{n+m} \right) \cos m\theta \\ M_1^2 &= \frac{1}{2} (B_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^2) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} B_i B_j - B_{m/2}^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n B_{n+m} \right) \cos m\theta \\ M_1 L_1 &= \frac{1}{2} (A_0 B_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} A_i B_j - A_{m/2} B_{m/2} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n B_{n+m} + A_{n+m} B_n) \right\} \cos m\theta \\ L_{1\theta}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} i j A_i A_j + \frac{m^2}{4} A_{m/2}^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) A_n A_{n+m} \right\} \cos m\theta \\ M_{1\theta}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 B_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j B_i B_j + \frac{m^2}{4} B_{m/2}^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) B_n B_{n+m} \right\} \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
M_{1\theta} L_{1\theta} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n B_n + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} ij A_i B_j + \frac{m^2}{4} A_{m/2} B_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) \right. \\
&\quad \left. (A_n B_{n+m} + A_{n+m} B_n) \right\} \cos m\theta \\
L_{1r}^2 &= \frac{1}{2} (A_{0r}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} A_{nr}^2) + \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} A_{ir} A_{jr} - A_{(m/2)r}^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{nr} A_{(n+m)r} \right) \cos m\theta \\
M_{1r}^2 &= \frac{1}{2} (B_{0r}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} B_{nr}^2) + \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} B_{ir} B_{jr} - B_{(m/2)r}^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_{nr} B_{(n+m)r} \right) \cos m\theta \\
M_{1r} L_{1r} &= \frac{1}{2} (A_{0r} B_{0r} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{nr} B_{nr}) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} A_{ir} B_{jr} - A_{(m/2)r} B_{(m/2)r} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (A_{nr} B_{(n+m)r} + A_{(n+m)r} B_{nr}) \right\} \cos m\theta
\end{aligned}$$

である。ただし、 $A_{m/2}$ および $B_{m/2}$ は m が偶数のときのみ存在するものとする。

つぎに、境界条件、式(3.37)を $\bar{r} = \bar{a}$ において満たす円柱関数を含む調和関数列を見出すことがきわめて困難であるので、式(3.37)の右边を $\bar{r} = \bar{a}$ のまわりで Taylor 級数展開した第1項すなわち $\bar{r} = \bar{a}$ でのみ式(3.37)を満足する解を求めることにする。そのために、 $\bar{r} = \bar{a}$ とおけば、 $A_n = (2/\pi\bar{a}) a_n$ 、 $B_n = (2/\pi\bar{a}) b_n$ および $L_{1r} = M_{1r} = 0$ であり、また、第2次近似解では2倍周波数のみを考えるので、 $\omega_1 = 0$ となる。したがって、式(3.37)は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{t}^2} &= - \frac{\omega_0}{\sinh \bar{h} \cosh \bar{h}} \left(\frac{2}{\pi \bar{a}} \right)^2 \left\{ - \left(\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} ij a_i b_j \right\} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m)(a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \cos m\theta \right] + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \\
&\quad \left[a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} a_i b_j - a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \cos m\theta \right] \right\} \\
&\quad \cos 2\bar{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} ij (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m)(b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \right\} \cos m\theta \right] + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \right. \\
&\quad \left. \left[(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j - a_i a_j) + (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \right\} \cos m\theta \right] \right) \sin 2\bar{t} \} ; \quad \bar{z} = 0, \quad \bar{r} = \bar{a}
\end{aligned} \quad (3.39)$$

一方、式(3.16)～(3.18)と式(3.21)を満足する $\bar{\phi}_1$ を $\bar{\phi}_0$ と同様に次式で仮定する。

$$\bar{\phi}_1 = -\omega_0 \cosh 2(\bar{h} + \bar{z})(L_2 \cos 2\bar{t} + M_2 \sin 2\bar{t}) + \omega_0 f(\bar{t}) \quad (3.40)$$

ここに、 L_2 および M_2 は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \{ Y'_m(2\bar{a}) J_m(2\bar{r}) - J'_m(2\bar{a}) Y_m(2\bar{r}) \} \cos m\theta = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos m\theta \\ M_2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \{ Y'_m(2\bar{a}) J_m(2\bar{r}) - J'_m(2\bar{a}) Y_m(2\bar{r}) \} \cos m\theta = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

さて、式(3.40)を式(3.39)の左辺に代入し、

$$\frac{1}{2} \{ Y'_m(2\bar{a}) J_m(2\bar{a}) - J'_m(2\bar{a}) Y_m(2\bar{a}) \} = \frac{1}{\pi \bar{a}} \quad (3.42)$$

を考慮すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{4\omega_0^3 \sinh^2 \bar{h}}{\pi \bar{a}} \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \cos 2\bar{t} + d_m \sin 2\bar{t}) \cos m\theta \\ &+ \omega_0^3 \frac{d^2 f(\bar{t})}{d\bar{t}^2}; \quad \bar{z} = 0, \quad \bar{r} = \bar{a} \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

となる。したがって、式(3.39)および(3.43)を等置すれば、 c_m 、 d_m および f は、それぞれつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi \bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left\{ \frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) (a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n) \right\} \\ c_m &= \frac{1}{\pi \bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left[\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_{n+m} b_n) \right\} + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} a_i b_j - a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{m=0}^{\infty} (a_n b_{n+m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_{n+m} b_n) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{2\pi \bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left[\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \{ (b_0^2 - a_0^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) \} \right] \\ d_m &= \frac{1}{2\pi \bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left[\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} i j (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m)(b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \Big\} + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \Big\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j \\
& - a_i a_j) - (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \Big\} \Big] \\
f &= \alpha t + \beta
\end{aligned} \tag{3.46}$$

ここに、 β は任意定数である。

つぎに、 $\bar{\eta}_1$ は式(3.20)に $\bar{\phi}_0$ 、 $\bar{\eta}_0$ および $\bar{\phi}_1$ を代入することにより次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_1 = & \left[2\omega_0^2 \cosh 2\bar{h} M_2 + \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \omega_0^{-4} (M_{1r}^2 - L_{1r}^2) + \omega_0^{-4} \left(\frac{1}{r} \right)^2 (M_{1\theta}^2 - L_{1\theta}^2) \right. \right. \\
& + 3(M_1^2 - L_1^2) \Big\} \Big] \cos 2\bar{t} + \left[-2\omega_0^2 \cosh 2\bar{h} L_2 + \frac{\omega_0^2}{2} \left\{ \omega_0^{-4} M_{1r} L_{1r} \right. \right. \\
& + \omega_0^{-4} \left(\frac{1}{r} \right)^2 M_{1\theta} L_{1\theta} + 3ML \Big\} \Big] \sin 2\bar{t} + \left[\frac{\omega_0^2}{4} \left\{ -\omega_0^{-4} (M_{1r}^2 + L_{1r}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. - \omega_0^{-4} \left(\frac{1}{r} \right)^2 (M_{1\theta}^2 + L_{1\theta}^2) + (M_1^2 + L_1^2) \right\} - \omega_0^2 \alpha \right]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

また、 \bar{p}_1 は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
\bar{p}_1 = & \left[2\omega_0^2 \cosh 2(\bar{h} + \bar{z}) M_2 + \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} (M_{1r}^2 - L_{1r}^2) \right. \right. \\
& + \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} \left(\frac{1}{r} \right)^2 (M_{1\theta}^2 - L_{1\theta}^2) + \frac{\sinh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} (M_1^2 - L_1^2) \Big\} \Big] \cos 2\bar{t} \\
& + \left[-2\omega_0^2 \cosh 2(\bar{h} + \bar{z}) L_2 + \frac{\omega_0^2}{2} \left\{ \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} M_{1r} L_{1r} + \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{r} \right)^2 M_{1\theta} L_{1\theta} + \frac{\sinh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} M_1 L_1 \right] \sin 2\bar{t} + \left[-\frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} (M_{1r}^2 \right. \right. \\
& + L_{1r}^2) + \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} \left(\frac{1}{r} \right)^2 (M_{1\theta}^2 + L_{1\theta}^2) + \frac{\sinh^2(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh^2 \bar{h}} (M_1^2 + L_1^2) \Big\} - \omega_0^2 \alpha \Big]
\end{aligned} \tag{3.48}$$

以上のようにして、 $\bar{\phi}_1$ 、 $\bar{\eta}_1$ および \bar{p}_1 が求められたが、これらの諸式において Bernoulli の定数項に相当する α が未決定であるので、 α をつぎのように決定する。式(3.39)の右辺は、 $\bar{r} \geq \bar{a}$ で表示されるべきものであるが、 $\bar{r} = \bar{a}$ で与えられているので、もともと \bar{r} の関数であるものが \bar{a} の関数として表示されており、そのまま $\bar{r} \rightarrow \infty$ にした場合には \bar{a} を含む項が残る。そこで、これらのうち、もともと \bar{r} のみの関数として表示される項と \bar{r} および \bar{a} の関数として表示される項を分離して $\bar{r} \rightarrow \infty$ とすれば、後者は円柱からの回折波であるので消滅し、結局、式(3.39)の左辺は Stokes 波の第2次近似解に相当した進行波だけ

が残ることになる。したがって、 α としては Stokes 波の第 2 次近似解による次式を用いることができる。

$$\alpha = -\frac{1}{4 \sinh^2 h} \quad (3.49)$$

また、 λ も Stokes 波の第 2 次近似解に相当して

$$\lambda = \frac{kH_0}{2} \quad (3.50)$$

になる。さらに分散を表わす関係式は第 1 次近似解である式 (3.36) と同一である。したがって、円柱壁における非線型回折波理論の第 2 次近似解は水位変動および波圧に対してそれぞれつぎのように表わされる。

まず、水位変動は、

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{H_0} = & \frac{1}{\pi k a} \left(-\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta \sin \sigma t - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\theta \cos \sigma t \right) + \frac{1}{2} \frac{k h \tanh k h}{(h/H_0)} \\ & \left[\left\{ \frac{\cosh 2 k h}{\pi k a} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos m\theta + \frac{1}{4(\pi k a)^2} \left(\frac{\cosh^2 k h}{(\cosh^2 k h)^2 \sinh^2 k h} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) \right. \right. \right. \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} \right. \\ & - a_n a_{n+m}) \} \cos m\theta \right] + 3 \left[(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j - a_i a_j) \right. \right. \\ & - (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \} \cos m\theta \right] \} \cos 2\sigma t + \left\{ -\frac{\cosh 2 k h}{\pi k a} \right. \\ & \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta + \frac{\cosh^2 k h}{2(k a)^2 \sinh^2 k h} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} \right. \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \} \cos m\theta \right] + \frac{3}{2} \left[a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} \right. \right. \\ & a_i b_j - a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \} \cos m\theta \right] \} \sin 2\sigma t + \left\{ -\frac{1}{4(\pi k a)^2} \right. \\ & \left(\frac{\cosh^2 k h}{(k a)^2 \sinh^2 k h} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 + a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j (b_i b_j + a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 \right. \right. \right. \\ & + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \} \cos m\theta \right] - [(b_0^2 + a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 \\ & + a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j + a_i a_j) - (b_{m/2}^2 + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \} \right. \\ & \left. \left. \left. \cos m\theta \right] \right) + \frac{1}{8 \sinh^2 k h} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

で表わされ、また、波圧は次式となる。

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho g H_0} = & \frac{\cosh k(h+z)}{\pi k a \cosh k h} \left(-\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta \sin \sigma t - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\theta \cos \sigma t \right) + \frac{1}{2} \frac{k h \tanh k h}{(h/H_0)} \\
& \left[\left\{ \frac{\cosh 2k(h+z)}{\pi k a} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos m\theta + \frac{1}{4(\pi k a)^2 \sinh^2 k h} \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(k a)^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \right. \right. \right. \right. \\
& (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) \right. \\
& (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \} \cos m\theta \left. \right] + \sinh^2 k(h+z) [(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j - a_i a_j) - (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \} \cos m\theta \right] \} \\
& \cos 2\sigma t + \left\{ -\frac{\cosh 2k(h+z)}{\pi k a} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta + \frac{1}{2(\pi k a)^2 \sinh^2 k h} \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(k a)^2} \right. \right. \\
& \left. \left[-\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right] \cos m\theta \right] \} \sin 2\sigma t \\
& + \left\{ -\frac{1}{4(\pi k a)^2 \sinh^2 k h} \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(k a)^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 + a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j (b_i b_j \right. \right. \right. \right. \\
& + a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \} \cos m\theta \right] \\
& + \sinh^2 k(h+z) [(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j + a_i a_j) - (b_{m/2}^2 \\
& + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \} \cos m\theta \right] + \frac{1}{8 \sinh^2 k h} \left. \right] - \frac{z}{H_0} \right\} \quad (3.52)
\end{aligned}$$

式(3.51)および(3.52)から明らかなように、水位変動および波圧は ka および kh ばかりでなく、 h/H_0 によっても変化することがわかる。また、非線型項を考慮した場合には、線型理論とは異なり、水位変動および波圧ともその時間波形が非対称になる。

3.3 非線型回折波理論による波力算定式

ここでは、3.2で求めた水位変動および波圧を表わす式を用いて大口径円柱に作用する全波力式を導き、数値計算を行なって、全波力および質量係数に及ぼす波の非線型効果を検討する。

3.3.1 全波力式

円柱に作用する全波力 F は流体の粘性を無視すれば、一般に次式で与えられる。

$$F = \int_{-h}^{\eta} \int_0^{2\pi} p a \cos \theta \, d\theta \, dz \quad (3.53)$$

さて、回折波理論の第1次近似解による全波力は $\eta = 0$ として式(3.53)に式(3.35)を代入し、三角関数の直交関係に注目して若干の計算を行なえば、次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F}{\rho g H_0 D^2} &= \frac{1}{4} \frac{\tanh kh}{(ka)^2} (-a_1 \sin \sigma t - b_1 \cos \sigma t) \\ &= \frac{\tanh kh}{2(ka)^2 \sqrt{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)}} \cos(\sigma t - \xi) \\ \xi &= \tan^{-1} \left\{ \frac{Y_1'(ka)}{J_1'(ka)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

つぎに、回折波理論の第2次近似解による全波力式を導くことにする。まず第1次近似解による波圧式である式(3.35)を式(3.53)に代入し、式中の双曲線関数を kh に関して展開して λ^2 まで考慮すれば、水面の効果を含めた第1次近似解による全波力 F_0 は、次式で表わされる。

$$\frac{F_0}{\rho g H_0 D^2} = \frac{1}{4} \frac{\tanh kh}{(ka)^2} (-a_1 \sin \sigma t - b_1 \cos \sigma t) + \frac{1}{4H_0 D} \int_0^{2\pi} \eta^2 \cos \theta d\theta \quad (3.55)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \eta^2 \cos \theta d\theta &= \frac{\pi H_0^2}{2(\pi ka)^2} \left[\left\{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right\} \cos 2\sigma t \right. \\ &\quad + \left\{ (a_0 b_1 + a_1 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n)) \right\} \sin 2\sigma t + \left\{ (b_0 b_1 + a_0 a_1) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

である。また、第2次近似解による変動波圧の積分の上限は λ の値を考慮すれば、 $\eta = 0$ であるので、積分は簡単にでき、結局、第2次近似まで考慮した全波力式は、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F}{\rho g H_0 D^2} &= \frac{1}{4} \frac{\tanh kh}{(ka)^2} (-a_1 \sin \sigma t - b_1 \cos \sigma t) + \frac{1}{32} \frac{kh}{\pi(ka)^3 (h/H_0)} \left\{ \left(2 \{ (b_0 b_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right\} - \frac{4}{\sinh^2 kh} \left[\frac{\cosh^2 kh}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_n a_{n+1}) + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 kh - 3) \{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \} \right] \right\} \cos 2\sigma t + \left(2 \{ (a_0 b_1 + a_1 b_0) \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \} - \frac{4}{\sinh^2 kh} \left[\frac{\cosh^2 kh}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \right. \\
& + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 kh - 3) \{ (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \} + \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \{ (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \right. \\
& \left. \left. (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \} \right] \sin 2\sigma t + \left(2 \{ (b_0 b_1 + a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) \} \right. \\
& \left. - \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \{ (b_0 b_1 + a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) \} \right] \right\}
\end{aligned} \quad (3.57)$$

式(3.57)の第1項はもちろん第1次近似解と一致する。また、第2項以下が波の非線型効果に対応するもので、とくに第4項は時間に関係しないいわゆる steady wave force を表わしている。第4項のうち、前半分は水面の存在によって生じた波力であり、後半分は速度項から生じたものである。また、式(3.57)から無次元全波力 $F/\rho g H_0 D^2$ は水位変動および波圧と同様に ka および kh ばかりでなく、波の非線型効果を表わす h/H_0 の関数となり、その時間波形も非対称になることがわかる。

図-3.2 は全波力に及ぼす波の非線型効果を検討するために、非線型回折波理論の第2次近似解による無次元全波力の最大値 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ および最小値 $F_{min}/\rho g H_0 D^2$ と D/L との関係を h/L および h/H_0 をパラメーターにして示したものであり、 $h/H_0 = \infty$ が第1次近似解に相当する。これらの図によれば、 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ および $F_{min}/\rho g H_0 D^2$ のいずれも D/L の増加とともに、いったん増加して極大値をとったのち、急激に減少することおよび波の非線型性が $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ および $F_{min}/\rho g H_0 D^2$ に及ぼす影響

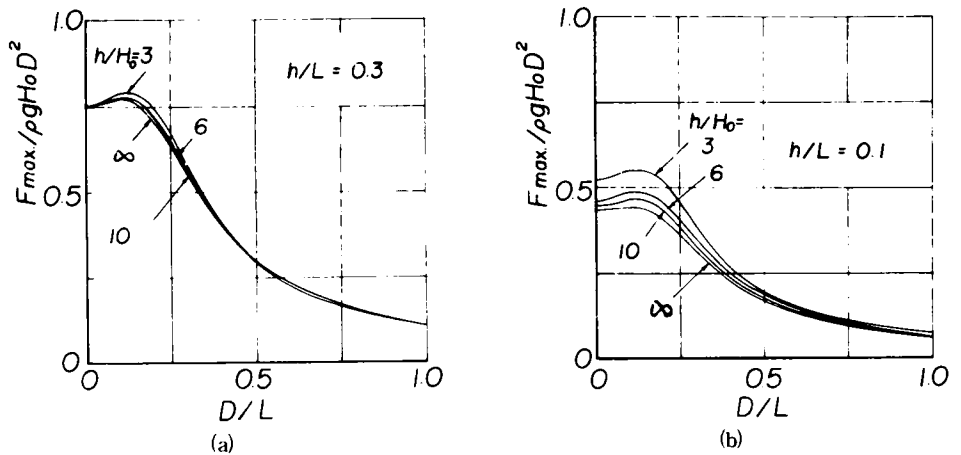


図-3.2

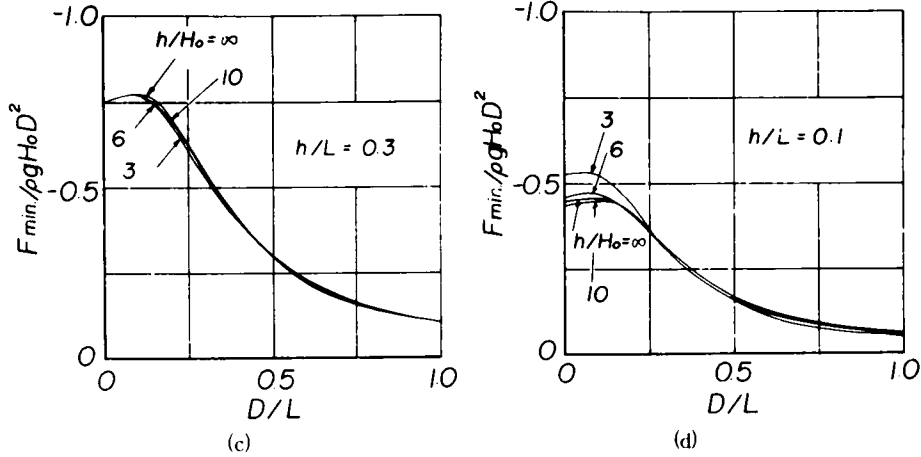


図-3.2 $F_{max.}/\rho g H_0 D^2$ および $F_{min.}/\rho g H_0 D^2$ の D/L による変化

は h/L の値が大きい場合にはそれほど顕著でないが、 h/L の値の小さい場合にはかなり大きく、しかも前者の方がより著しいことがわかる。したがって、浅海域における大口径円柱の波力の推定には、波の非線型性の影響を考慮する必要があるといわねばならない。

3.3.2 質量係数に関する考察

ここでは、非線型回折波理論の第2次近似解による全波力式を用いて円柱の質量係数を理論的に求め、質量係数に及ぼす波の特性や円柱径の影響とくに波の非線型効果を検討する。

いま、Morisonらの微小振幅波理論に基づく波力算定式において、抗力を無視し、慣性力のみを考慮すると、全波力は、式(2.84)から

$$\frac{F_I}{\rho g H_0 D^2} = -\frac{\pi}{8} C_M \tanh kh \sin \sigma t \quad (3.58)$$

となる。式(3.54)および(3.58)は位相に相違はあるが、これを無視して両式の最大値が一致するようにすれば、

$$C_M = \frac{4}{\pi (ka)^2 \sqrt{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)}} \quad (3.59)$$

で与えられる。これは Reid の求めた結果であり、このような方法で決定された微小振幅波理論による円柱の質量係数は ka すなわち円柱径と波長との比 D/L のみに依存し、しかも位相によって変化しないことがわかる。

つぎに、波の非線型性を考慮した場合の円柱の質量係数の特性について考察する。

Stokes 波の第2次近似解を用いれば、Morison の波力算定式中の慣性力は式(2.84)より λ のべきを考

慮して若干の計算を行なえば、次式のようになる。

$$\frac{F_I}{\rho g H_0 D^2} = -\frac{\pi}{8} C_M \tanh kh \left\{ \sin \sigma t + \frac{1}{8} \frac{kh}{(h/H_0) \sinh^2 kh} (6 \cosh kh - 2kh + \sinh 2kh) \sin 2\sigma t \right\} \quad (3.60)$$

波の非線型性を考慮した場合も式(3.57)および(3.60)が最大値をとるように位相を一致させれば、全波力の最大値の位相における質量係数が求められる。この場合の質量係数は解析的に求められないが、式(3.57)および(3.60)から明らかなように、 D/L のみでなく、 h/L および h/H_0 の関数となる。図-3.3は全波力の最大値の位相における質量係数の D/L による変化を h/L および h/H_0 をパラメーターにして示したものである。図から明らかなように質量係数は、一般に第1次近似解による結果より小さくなり、その傾向は h/H_0 の値が小さく、 h/L の値が大きいときほど著しい。これは波の非線型性を示す h/H_0 や h/L の式(3.60)に及ぼす影響が式(3.57)のそれに比べて大きいためである。

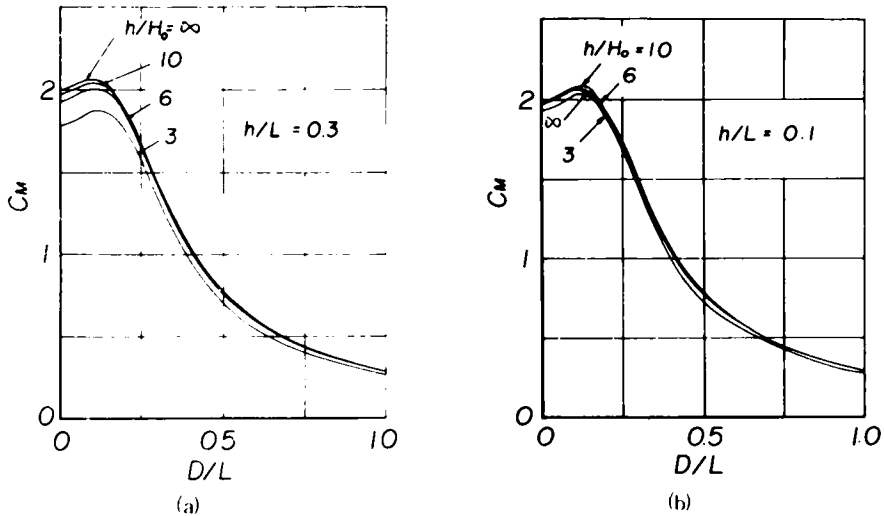


図-3.3 質量係数に及ぼす波の非線型効果

ところで、式(3.60)は円柱中心での波の位相における水位変動を用いているために、 D/L の値が大きい場合や h/H_0 の値が小さい場合には、円柱の水没体積を過大にあるいは過小に評価していると考えられる。そこで円柱の水没体積を計算して質量係数の補正を試みることにする。

まず、円柱の水没体積は、次式で計算される。

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_{-h}^\eta 2a^2 \sin^2 \theta dz d\theta \\ &= \int_0^\pi 2a^2 (\eta + h) \sin^2 \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.61)$$

になる。つぎに、水位変動として微小振幅波理論による関係

$$\eta = \frac{H_0}{2} \cos(ka \cos \theta - \sigma t) \quad (3.62)$$

を用いると、式(3.61)は次式で表わされる。

$$V = \pi a^2 h + H_0 a^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(ka \cos \theta - \sigma t) d\theta \quad (3.63)$$

ここで、積分公式

$$\int_0^\pi e^{i ka \cos \theta} \cos n\theta d\theta = \pi (i)^n J_n(ka) \quad (3.64)$$

を利用すれば、式(3.63)は次式となる。

$$\begin{aligned} V = & \frac{\pi D^2 h}{4} + \frac{H_0 D^2}{8} \int_0^\pi \{ \cos(ka \cos \theta) \cos \sigma t + \sin(ka \cos \theta) \sin \sigma t \\ & - \cos(ka \cos \theta) \cos 2\theta \cos \sigma t - \sin(ka \cos \theta) \cos 2\theta \sin \sigma t \} d\theta \\ & - \frac{\pi D^2}{4} \left\{ h + \frac{H_0}{ka} J_1(ka) \cos \sigma t \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

一方、式(3.60)では

$$V' = \frac{\pi D^2}{4} \left(h + \frac{H_0}{2} \cos \sigma t \right) \quad (3.66)$$

の水没体積を近似的に計算しているものと考え、質量係数を評価する場合、円柱の水没体積を(V' — V)だけ過大に評価していることになる。そこで、

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h \left[1 + \left(\frac{H_0}{h} \right) \left\{ \frac{J_1(ka)}{ka} - \frac{1}{2} \right\} \cos \sigma t \right] \quad (3.67)$$

として、近似的に式(3.60)を次式

$$\begin{aligned} \frac{F_{IV}}{\rho g H_0 D^2} = & -\frac{\pi}{8} C_M \tanh kh \left(\sin \sigma t + \left[\frac{1}{8} \frac{kh}{(h/H_0) \sinh^2 kh} (6 \cosh kh \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 kh + \sinh 2 kh) + \frac{1}{2(h/H_0)} \left\{ \frac{J_1(ka)}{2ka} - 1 \right\} \right] \sin 2\sigma t \right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

に置き換えて、全波力の最大値の位相における質量係数の補正計算を行なったのが図-3.4であるが、その効果はせいぜい3%程度であり、きわめて小さいことがわかる。

上述した方法で求めた質量係数は微小振幅波理論によれば位相に関して一定であるが、非線型理論では位相変化を生じる。図-3.5は式(3.57)および(3.60)の最大値の位相を一致させた場合の質量係数の位相による変化を示したものである。この図によれば、質量係数は $t/T = 0$ 近傍では比較的一定であるが、そのほかでは急激な位相変化を示し、その傾向は h/H_0 の値が小さいときほど著しいことがわかる。また、 $t/T \approx \pm 0.25$ 近傍で質量係数が無限大になるのは式(3.57)と(3.60)の零点が一致しないため

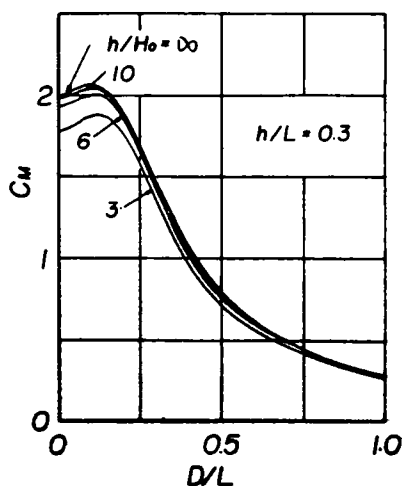


図-3.4 質量係数に及ぼす円柱の水没体積の影響

である。

以上のように波の非線型性を考慮した場合の円柱の質量係数は D/L のみでなく、 h/L 、 h/H_0 さらに t/T によって変化することがわかる。

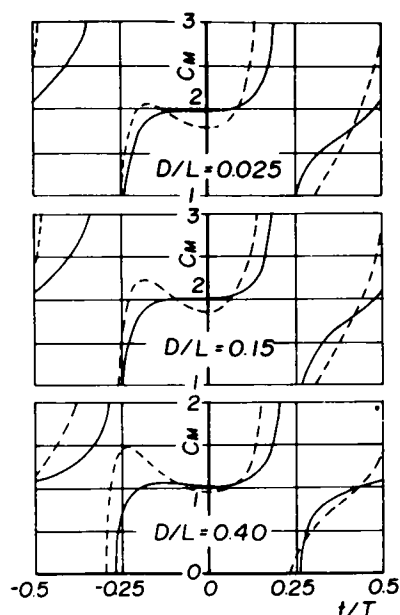


図-3.5 質量係数の位相による変化
($h/L = 0.3$, — $h/H_0 = 10$,
.... $h/H_0 = 3$)

3.4 円柱に作用する波圧および水位変動の特性

前述したように、大口径円柱に作用する波圧に関する実験は Laird および永井らにより行なわれているが、Laird の実験結果は線型回折波理論による波圧分布より水底に至るにしたがって急激に減少しており、その結果の妥当性に疑問を残している。また永井らのものは理論解との比較が行なわれていない。さらに、これらの実験結果はいずれも水深・波高比 h/H_0 の値が大きい場合に限られているので、波圧に及ぼす波の非線型効果を明らかにすることはできない。そこで、3.4 では波圧および水位変動に関する実験を実施し、実験結果と非線型回折波理論解との比較より、その適用性を検討した結果について述べる。

3.4.1 実験装置および実験方法

実験は宇治川水理実験所にある長さ 20 m、幅 3 m、深さ 70 cm のプランジャー式造波機を備えた波圧実験用水槽を用いて行なった。実験装置は図-3.6 に示すように造波機側の水槽端より 11.0 m の地点に波圧計ねじ込み用の孔のあいた円柱を取り付け、また円柱周辺の水槽側壁および水槽の他端には反射波を防ぐため消波装置を設置したものである。波圧は円柱に取り付

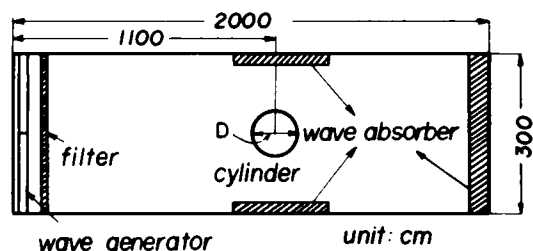


図-3.6 実験装置の概略図

けた数個の波圧計により，また入射波高は造波機より約 5.0 m の位置で，壁面波高は円柱前面の $\theta = 0^\circ$ の位置で電気抵抗線式波高計によって測定した。使用した円柱は直径 $D = 40.6$ cm および 24.2 cm である。

鉛直波圧分布の実験では， $\theta = 0^\circ$ の位置で鉛直方向に数個の波圧計を取り付け，波圧の時間的变化とともに入射波高および $\theta = 0^\circ$ における壁面波高を記録させた。一方，水平波圧分布の実験では， $z = -10.0$ cm の位置で水平方向に 5 個の波圧計を取り付け，波高を数種変化させて水平同時波圧分布を測定した。しかし， $D = 24.2$ cm の場合には波圧計を水平方向に同時に取り付けることができなかったため， $\theta = 0^\circ$ につねに波高計を設置して波圧記録の位相の相互関係が見失われないように注意しながら，鉛直方向に取り付けた 5 個の波圧計を 45° ずつまわすことにより，水平波圧を測定した。また円柱壁面に沿う水位変動に関する実験では，ペンキで $2\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ のメッシュを入れた円柱を 2 台の 16 mm 撮影機で同時撮影することにより測定を行なった。

実験に際して，まず問題になったのは使用した水槽が短いために，入射波高の測定位置と円柱設置位置との距離が十分にとれなかったことである。両者の距離があまり短かいと円柱による回折波が入射波に加わり，見かけ上入射波高が大きくなって波圧記録の解析の誤差の原因になる。そこで，造波機始動後の入射波高の変化を調べたところ，実験の範囲内では 8～15 波の間の波高がほぼ一定であったので，入射波高としてこの間の 4～5 波の平均値を用いた。さらに，入射波高の測定位置が実験装置の制約上あまり造波機に近すぎ，円柱設置位置での入射波高と若干異なっていたので，あらかじめ求めておいた入射波高測定位置での波高と円柱設置位置での波高との関係から入射波高の補正を行なった。この補正は 3.5 で述べる全波力の実験に際しても同様に行なった。表-3.1 は実験条件および実験波の特性を示したものである。なお，円柱による回折波は円柱より全方向に発散されるものであるが，水槽側壁での反射は消波装置により完全に打ち消されるものとして実験結果の解析を進めた。

表-3.1 実験条件および実験波の特性
(波圧および水位変動の実験)

周期 T_{sec}	水深 h_{cm}	直径 D_{cm}	D/L	入射波高 H_0 cm
0.8	40.0	40.6	0.41	1.1 ~ 10.8
1.0	40.0	40.6	0.28	0.8 ~ 11.5
1.2	40.0	40.6	0.21	1.7 ~ 12.6
0.8	40.0	24.2	0.25	1.5 ~ 11.5
1.0	40.0	24.2	0.17	1.2 ~ 12.3
1.2	40.0	24.2	0.13	1.7 ~ 11.5

3.4.2 波圧に関する実験結果および考察

図-3.7 (a), (b) および (c) は $\theta = 0^\circ$ に波の峰がきたときの $\theta = 0^\circ$ での無次元波圧強度 $p/\rho g H_0$ の h/H_0 による変化を示したもので，図中の実線および点線はそれぞれ非線型回折波理論の第 1 次近似解および第 2 次近似解を表わす。これらの図をみると， h/H_0 の値の大きいところでは実験結果はほぼ一定値をとり，第 1 次近似解と比較的よく対応しているが， h/H_0 の値が小さくなるにつれて， $p/\rho g H_0$ の値が減少し，

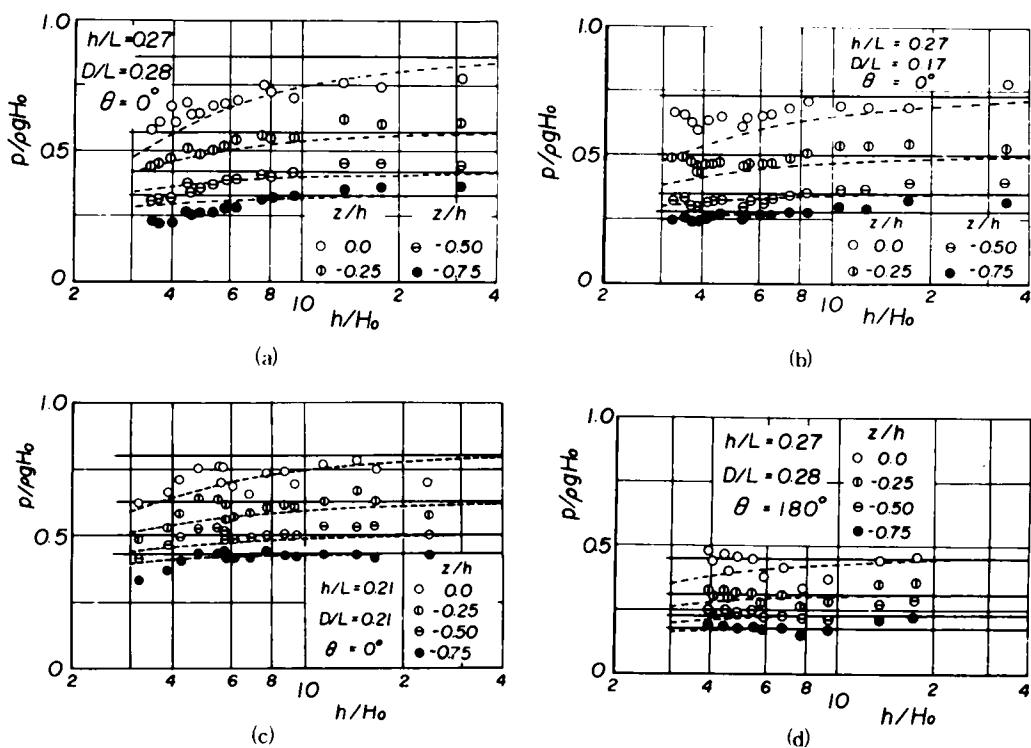


図-3.7 $p/\rho g H_0$ の h/H_0 による変化

その傾向は第1次近似解を離れて第2次近似解と一致するようになる。図-3.7(d)は $\theta = 180^\circ$ におけるものであるが、同一の波の特性に対して $p/\rho g H_0$ の実験結果の h/H_0 による変化特性は $\theta = 0^\circ$ の場合に比べて小さく、円柱後面では円柱前面より波の非線型効果が小さいことがわかる。

また、 $\theta = 0^\circ$ および 90° の波の峯の位相における波圧の鉛直分布を示したものが図-3.8である。こ

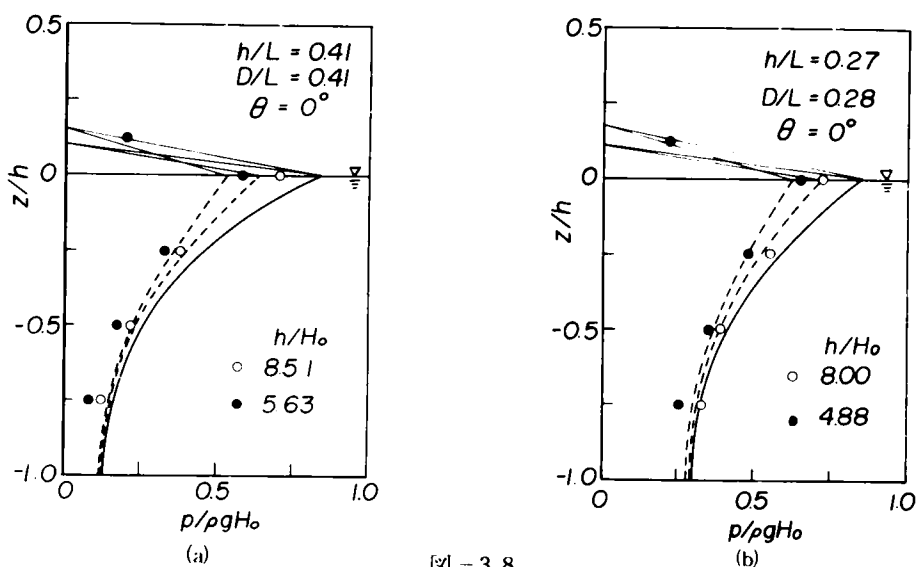


図-3.8

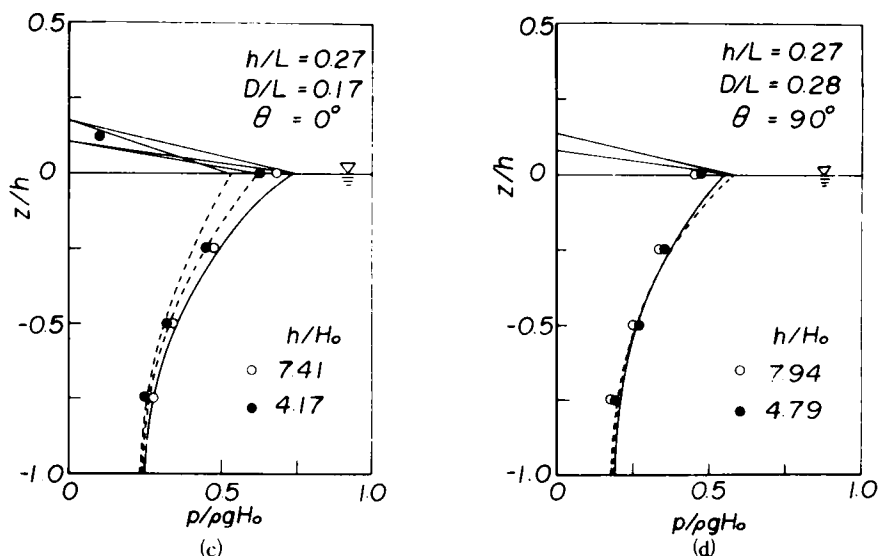


図-3.8 波圧の鉛直分布

この図では、静水面上の波圧分布に対して水位変動の最大値と $z/h=0$ における p/pgH_0 との値を結ぶことによって得られる三角形の波圧分布が作用するものとして細い実線で示している。これらの図によれば、 $\theta=0^\circ$ での実験結果は第1次近似解による理論曲線より小さく、第2次近似解と比較的よく一致しているといえる。しかし $\theta=90^\circ$ では実験および理論によるいずれの結果も、 h/H_0 によってほとんど変化しない。また、Laird が著者と同様の実験を行なって、波圧の鉛直分布は双曲線関数表示によるものより水底に近づくにつれて急激に減少すると述べていることとは異なり、著者の実験結果の鉛直分布形状は双曲線関数でよく表現されることがわかる。

図-3.9(a)および(b)は $\theta=0^\circ$ での波圧の時間的変化を示したものである。 $\theta=0^\circ$ では波圧波形の非対称性はほとんど現われないが、実験結果は最大値付近で第1次近似解より小さくなり、最小値付近では逆に大きくなって第2次近似解とよく一致している。また図-3.9(c)は波圧波形に非対称性をもっとも顕著に現われる $\theta=90^\circ$ の場合を示したものである。第1次近似解は波圧波形の非対称性を全く説明できないが、一方、第2次近似解は水面に近いほど、波圧波形の非対称性が著しくなるという実験結果の傾向をよく説明している。ただし、 h/H_0 の値が小さい場合には2倍周波数成分の補正がききすぎて、実験結果より波圧波形の非対称性が著しくなる。また、第2次近似解によれば、 h/L の値が大きく、 h/H_0 の値が小さい深海波に近い高波高の波の場合に $\theta=0^\circ$ 近傍において出現する双峯型の波圧波形も説明できるが、解の近似度

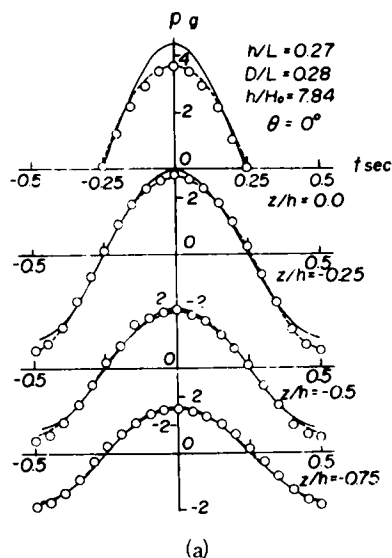


図-3.9

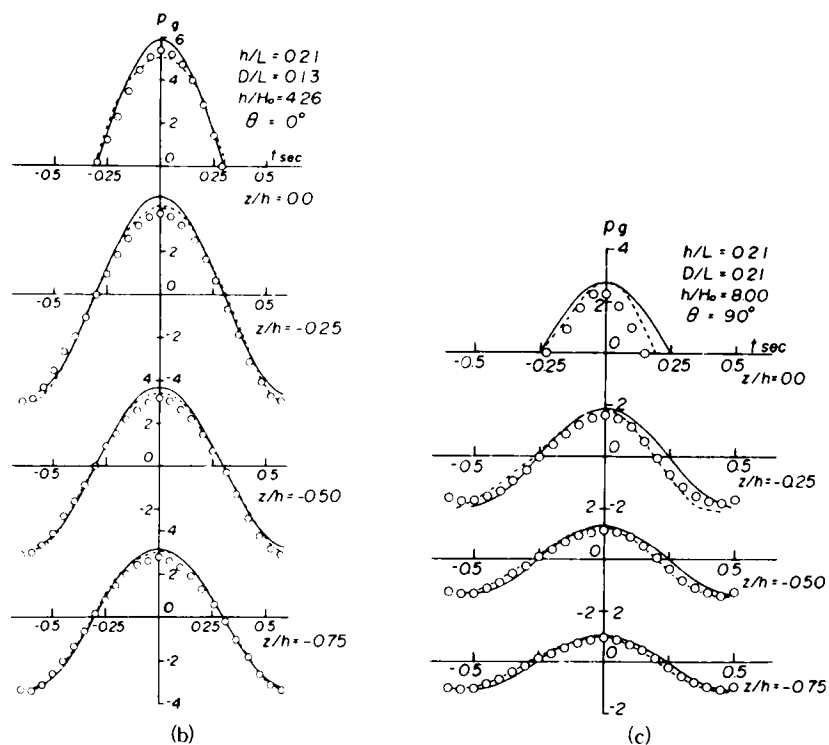


図-3.9 鉛直波圧分布の時間的变化

が低いために、第2次近似解ではこの現象を十分解明するまでには至っていない。

つぎに、円柱壁面に沿う波圧の水平分布について考察しよう。図-3.10 は波圧の水平分布を示したも

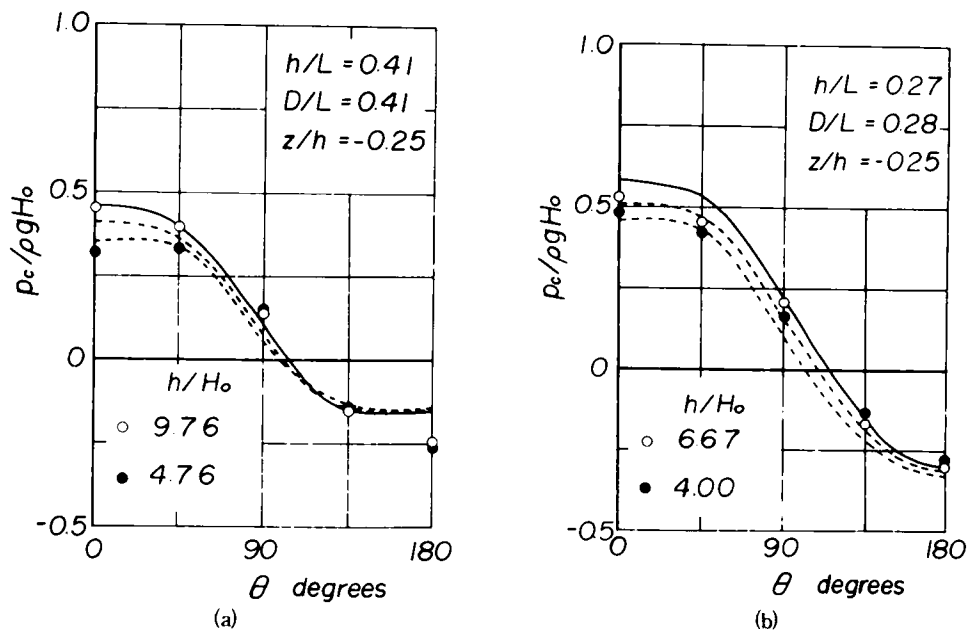


図-3.10

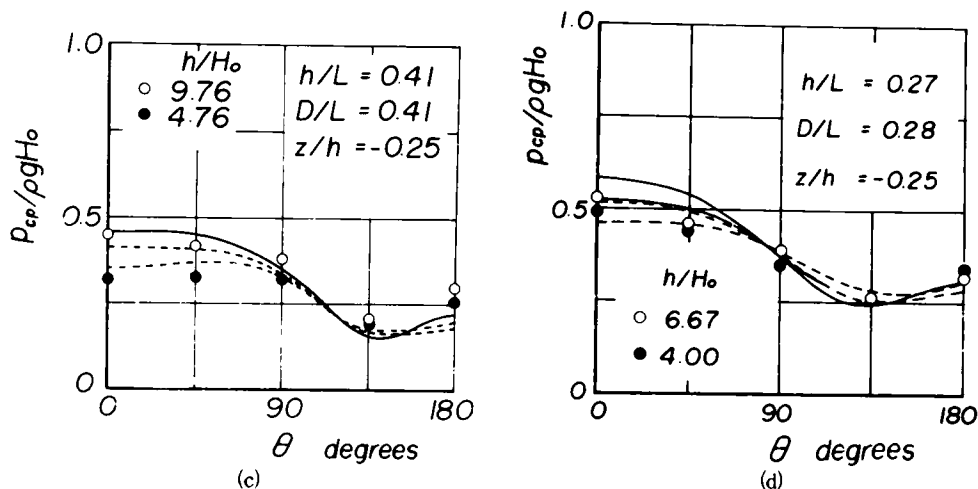


図-3.10 波圧の水平分布

のであり、このうち、(a)および(b)は $\theta = 0^\circ$ の位置に波の峯がきたときの水平同時波圧 $p_c / \rho g H_0$ の θ による変化を示し、また(c)および(d)はそれぞれの θ の位置に波の峯がきたときの水平波圧 $p_{cp} / \rho g H_0$ の θ による変化を表す。 θ が 90° より大きい円柱後面では h/H_0 の影響が小さいので、いずれの理論解と一致するかは明確でないが、円柱前面付近では h/H_0 の値の増加とともに、 $p_c / \rho g H_0$ および $p_{cp} / \rho g H_0$ の両方の実験結果とも第1次近似解より小さく、全体的には第2次近似解と比較的よく一致している。

図-3.11は $\theta = 0^\circ$ に波の峯がきたときの水平波圧分布の時間的変化を示したものであり、実験結果は波形の非対称性を含めて第2次近似解による理論曲線とよく一致している。とくに、図-3.11(c)から明らかに、第2次近似解によれば、波圧波形の非対称性は $\theta = 90^\circ$ 付近でもっとも著しく、 $\theta = 90^\circ$ で波圧の最大値をとる位相が第1次近似解によるものよりずれることや、波圧波形の非対称性の程度が $\theta = 90^\circ$ を中心として、円柱前面および後面に近づくにつれて小さくなることを定性的に説明することができ

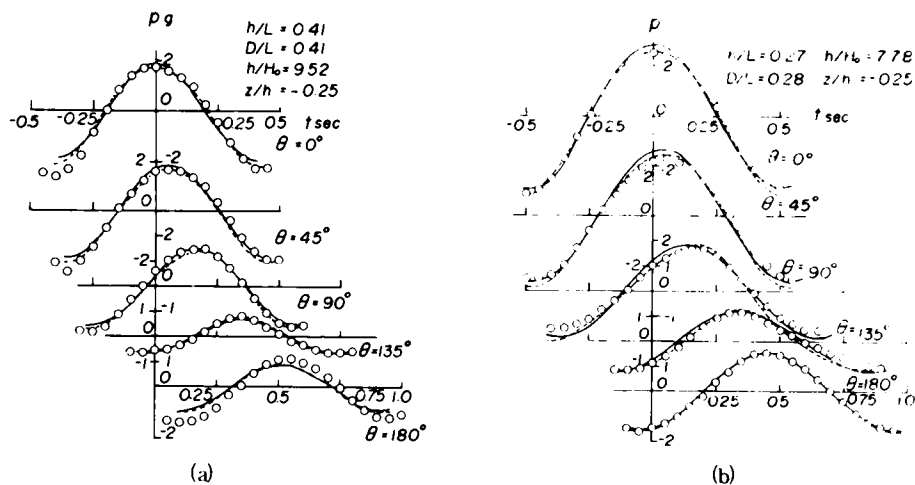


図-3.11

る。ただし、この場合の h/H_0 の値がかなり小さいために、第2次近似解による $\theta = 90^\circ$ および 135° での理論結果と実験結果の対応は若干悪い。

以上のように、大口径円柱に作用する波圧に及ぼす波の非線型効果はかなり大きく、 $\theta = 0^\circ$ での波圧の最大値の実験結果は第1次近似解より小さい。また、非対称な波圧波形が出現するが、これらは波の非線型性を考慮した非線型回折波理論の第2次近似解によって比較的よく説明できる。したがって、大口径円柱に作用する波圧のより適確な推定には本研究で述べたような非線型回折波理論を用いる必要がある。なお、入射波高がきわめて大きい場合には、円柱前面および後面においては円柱に沿う波が重なり合って跳波状態になるが、大口径円柱を用いた構造物の計画設計にはこの現象を考慮しなければならない。

3.4.3 水位変動に関する実験結果および考察

ここでは円柱壁面に沿う水位変動の実験結果と理論結果との比較検討について簡単に述べることにする。

図-3.12 は $\theta = 0^\circ$ の位置における水位変動の時間的变化を示したものである。この図によれば、水位変動の場合には波圧と異なり、波の非線型効果はそれほど顕著に現われないが、時間波形については、水位が正側にある時間が長くなることがわかる。つぎに、 $\theta = 0^\circ$ に波の峯および谷がきたときの円柱壁面に沿う水位変動の実験結果と理論曲線との比較の1例を示したものが図-3.13 である。実験結果はいずれの理論曲線とも比較的よく一致しているが、 $\theta = 90^\circ$ 付近では理論曲線の傾向が相互に異なっている。すなわち、 $\theta = 0^\circ$ に波の峯がきたときの第2次近似解による水位変

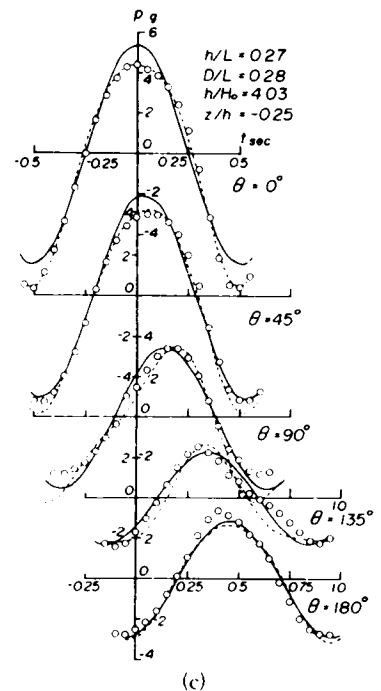


図-3.11 水平波圧分布の時間的变化

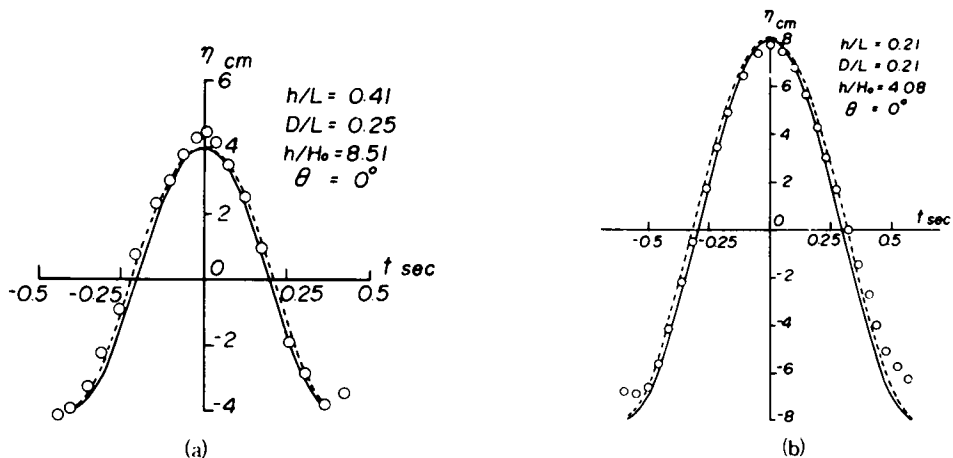


図-3.12 水位変動の時間的变化

動は第1次近似解によるものに比べて変化の度合がより著しく、また波の谷がきたときには逆の傾向を示し、実験結果の傾向に近くなる。しかし、さらに高波高の場合には $\theta = 90^\circ$ 付近におけるこの傾向が著しくなり、かえって実験結果との対応が悪くなる場合が見られた。これは第2次近似解の適用範囲と関連するものであるが、実験ケースが少なく、必ずしも明確でない。

以上の著者の結果のほかに円柱壁面に沿う波高分布については他の研究者により若干の結果が発表されているので、これらの結果を検討してみよう。

図-3.14はLaird, Bonnefilleらおよび永井らによる円柱壁面に沿う波高分布の実験結果を示したものである。ここに図中の丸印および点線が実験結果である。また、Bonnefilleらの実験結果は入射波高が不明であり、Lairdおよび永井らのものは h/H_0 の値が大きく、非線型効果がほとんど現われないので、第2次近似解は図示していない。これらの実験結果では D/L の値が $0.2 < D/L < 1.4$ ときわめて広範囲

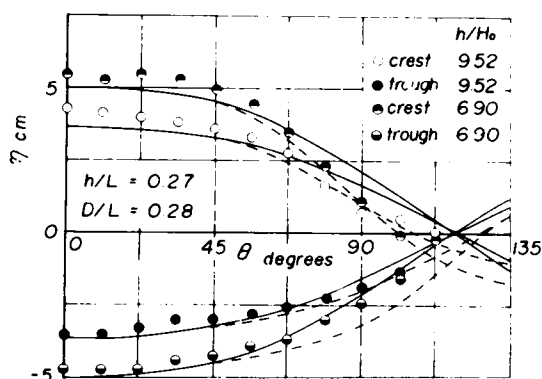
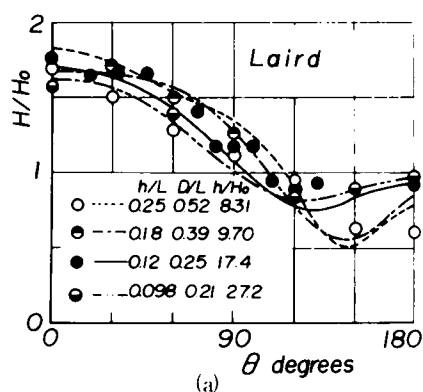
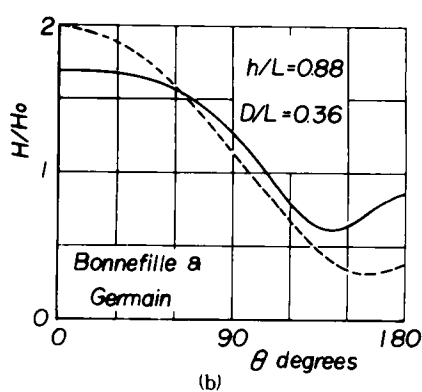


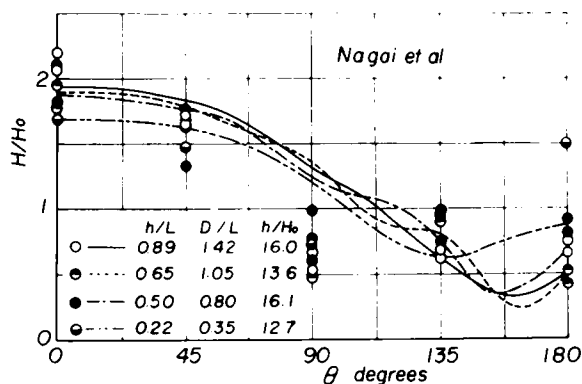
図-3.13 円柱壁面に沿う水位変動の分布



(a)



(b)



(c)

図-3.14 円柱壁面に沿う波高分布

にわたっており、Bonnefille らの実験結果を除けば、実験結果と理論結果は比較的良好に一致しているといえよう。ただし、 h/L の値の大きい場合には、著者の実験結果も含めて実験結果の方が理論結果より大きくなる傾向がある。

3.5 円柱に作用する全波力

3.3 では非線型回折波理論の第2次近似解による全波力式を数値計算することにより、 h/L の値が小さい場合を除いて波の非線型性が全波力に及ぼす影響は小さいことおよび質量係数が h/H_0 とともに減少することを理論的に示したので、3.5 では全波力に関する実験を行ない、実験結果と理論結果との比較よりこの結果が妥当であるかどうかを検討する。

3.5.1 実験装置および実験方法

実験装置および波力測定装置はそれぞれ 3.4.1 および 2.5.2 で述べたものと同じであるので省略する。実験に使用した円柱の直径は 50 cm および 30 cm であり、波力測定系の水中固有振動数は 5.0 cps であった。また、入射波高は 3.4.1 で述べた方法により補正を行なった。表-3.2 は実験条件および実験波の特性を一括して示したものである。

表-3.2 実験条件および実験波の特性
(全波力に関する実験)

周期 T_{cm}	水深 h_{cm}	直径 D_{cm}	D/L	入射波高 H_0_{cm}
0.6	30.0	50.0	0.89	0.6 ~ 3.0
0.7	40.0	50.0	0.66	0.7 ~ 7.6
0.8	40.0	50.0	0.51	1.2 ~ 12.3
1.0	40.0	50.0	0.34	1.4 ~ 14.6
1.2	40.0	50.0	0.26	0.9 ~ 10.1
1.2	40.0	30.0	0.16	0.9 ~ 10.0

3.5.2 全波力に関する実験結果および考察

図-3.15 は全波力に及ぼす波の非線型効果を検討するために、全波力の最大値 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ の h/H_0 による変化を示したものであり、図中の実線および点線はそれぞれ非線型回折波理論の第1次近似解および第2次近似解を表わす。実験結果の D/L の範囲は $0.16 < D/L < 0.89$ で、かなり広範囲にわたっている。図によれば、ばらつきは大きいですが、いずれの実験結果も h/H_0 によってそれほど変化せず、理論結果の傾向とよく一致している。しかし実験結果の方が理論結果より全体的に若干大きい。この原因の1つとして、波力測定系の固有周期が入射波の周期に比べてそれほど小さくないことが考えられる。そこで、ここでは静水中での自由振動の詳細な測定から得られた波力測定装置の固有振動数 5.0 cps および対数減衰率 0.016 を用いて1自由度の振動系として計算される変位から全波力を求め、静的に計算した全波力と比較した結果、その差は3~12%であった。したがって、以下では、波力測定装置の変位から求めら

れる全波力の実験結果と前述した振動系の外力に対して回折波理論を適用して得られた変位から計算される全波力の理論結果とを比較検討する。

図-3.16は図-3.15の結果を補正したものであり、理論結果は図-3.15に比べて実験結果と比較的によく一致している。つぎに、全波力の時間的変化を示したのが図-3.17である。第2次近似解によれば、全波力の時間波形が非対称になるが、図-3.17の実験結果にはこうした傾向が現われていることがわかる。

以上の考察より、全波力に及ぼす波の非線型効果は小さいという非線型回折波理論の第2次近似解による結果がある程度確かめられたといえよう。

3.5.3 質量係数に関する考察

図-3.18は全波力の最大値および最小値から Stokes 波の第1次近似解を用いて求めた質量係数 C_M の直径・波長比 D/L による変化を示したものであり、図中の実線は式(3.59)によるものである。実験結果のばらつきの幅は大きいが、 C_M は D/L の値

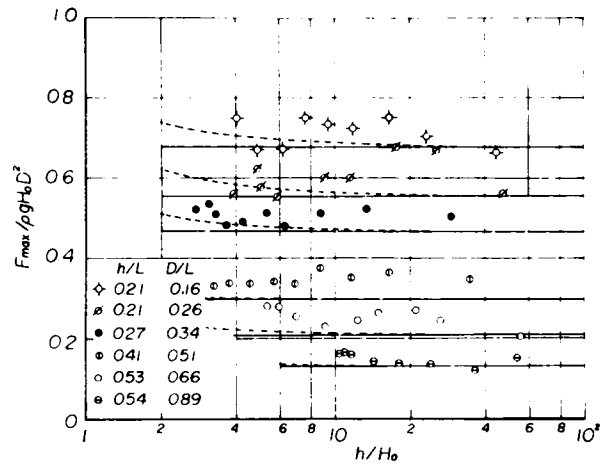


図-3.15 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ の h/H_0 による変化(1)

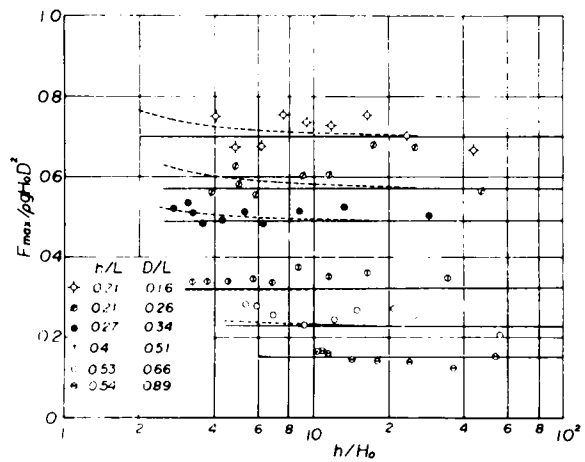


図-3.16 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ の h/H_0 による変化(2)

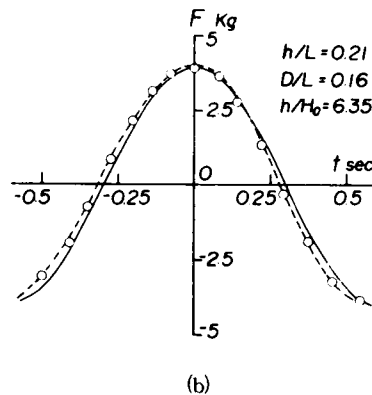
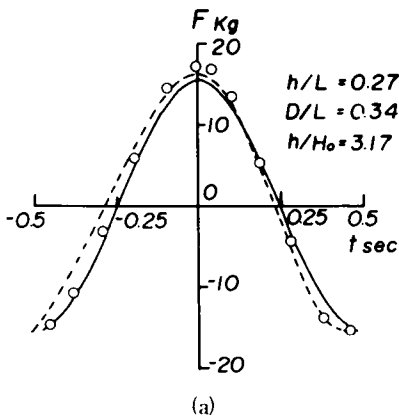


図-3.17 全波力の時間的変化

の増加とともに急激な減少を示し、理論曲線とその傾向がよく一致している。図-3.19は質量係数に及ぼす波の非線型効果を検討するために、全波力の最大値より Stokes 波の第2次近似解を用いて求めた C_M の h/H_0 による変化を示したものであり、図中の実線は非線型回折波理論の第2次近似解より算出した質量係数の理論曲線を表わす。この図より C_M の実験結果は理論によって与えられるように、 h/H_0 の値の減少とともに減少していることがわかる。

つぎに、2.で考察した質量係数と非線型回折波理論による質量係数との関連を検討してみよう。2.で述べた質量係数は回折波理論においていわば $D/L \rightarrow 0$ にした場合に相当するものである。ただし2.および3.での質量係数の意味はその決定方法の相違や位相変化に起因して若干異なっている。図-3.20は2.で述べた第2定義による Stokes 波の第4次近似解による鉛直円柱の質量係数

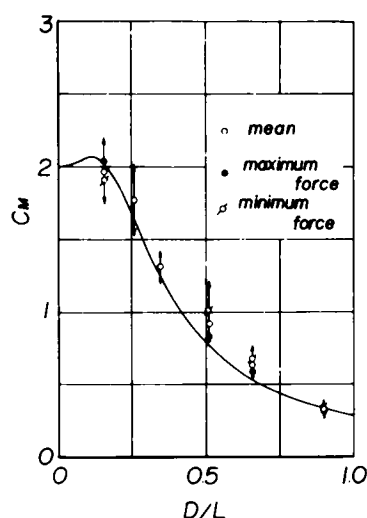


図-3.18 C_M の D/L による変化
(第1次近似解による)

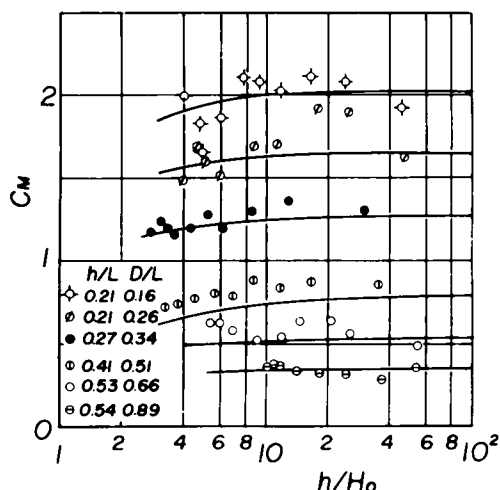


図-3.19 C_M の h/H_0 による変化
(第2次近似解による)

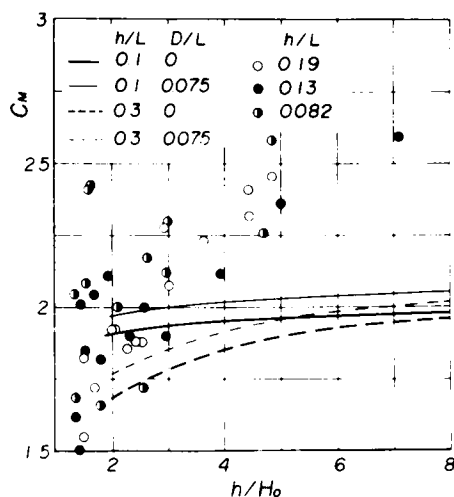


図-3.20 C_M の h/H_0 による変化
($D/L \rightarrow 0$ の場合)

の実験結果のうち、 h/L の値が大きいものを選んで、 h/H_0 による変化として示したものである。図中の太線および細線はそれぞれ $D/L \rightarrow 0$ および質量係数が極大値に近い値をとる $D/L = 0.075$ の場合の非線型回折波理論による質量係数の理論曲線である。図より明らかなように、この場合の質量係数の実験結果は h/H_0 の値の減少とともに、理論曲線よりさらに急激な減少を示している。これは質量係数の推定に用いた Stokes 波の第4次近似解の適用限界にも関連するが、質量係数が波の非線型効果のほかに円柱への波のはいあがりやうずの発生発散といった現象の影響を受けているためと考えられる。

3.6 結 語

以上3.では大口径円柱に作用する波圧・波力を適確に評価する計算法を確立するための基礎研究を波圧・波力に及ぼす波の非線型効果の解明という観点から実施して、つぎの結果を得た。

すなわち、3.1では大口径円柱に作用する波圧・波力に関する従来の研究を要約し、従来この種の研究が少なく、こうした場合の波圧・波力を評価するための回折波理論の適用性とくに波の非線型性の影響がほとんど明確でないことを指摘した。そこで3.2ではポテンシャル流理論による非線型境界値問題の近似解をせつ動法を用いて求めた。すなわち、微小なパラメーター λ の自乗の項まで水面における境界条件を壁面で満足する非線型回折波理論の第2次近似解を導き、波圧および水位変動を表示する式を得た。そして、波圧および水位変動の時間波形は波の非線型性を考慮すると、非対称になることを理論的に示した。3.3では第2次近似解による波圧および水位変動を用いて、大口径円柱に作用する全波力式を誘導した。全波力の最大値および最小値を数値計算によって求め、全波力に及ぼす波の非線型効果を検討した結果、比水深の小さい場合を除いて、全波力の最大値および最小値に及ぼす波の非線型効果は小さいことを明らかにした。また、第2次近似解による全波力の最大値から求めた質量係数は直径・波長比ばかりでなく、比水深および水深・波高比にも関係し、同一の直径・波長比に対して比水深の値が大きく水深・波高比の小さいほど、その値が小さくなり、さらにこのようにして決定された質量係数は位相によっても変化することを示した。

つぎに、3.4では波圧および水位変動に関する実験結果と理論曲線との比較から、円柱前面($\theta = 0^\circ$)では波の非線型性の影響が強く現われて、波の峯の位相における波圧は水深・波高比の減少とともに減少し、その傾向は第2次近似解による理論曲線とよく一致することや波圧の鉛直および水平分布の実験結果と第2次近似解による理論結果との対応がよいことを見出した。また波の非線型効果である波圧の時間波形の非対称性は円柱側面($\theta = 90^\circ$)でもっとも顕著に現われ、円柱前面および後面に近づくにつれてその影響が小さくなり、この結果は第2次近似解によってよく説明されることを明らかにした。さらに、円柱壁面に沿う水位変動の分布の実験結果は理論曲線と比較的よく一致するが、水深・波高比の小さい場合には、円柱側面での両者の対応が悪くなることを指摘した。最後に、3.5では直径・波長比の広範囲な領域における全波力の実験結果の考察から、時間波形は非対称になるが、全波力の最大値に及ぼす波の非線型効果が小さいことおよび質量係数は水深・波高比の減少とともに減少するという非線型回折波理論による結果を確かめることができた。したがって、波の非線型性の影響は波圧については比較的大きいが、波圧の円周および水深方向についての積分である全波力については、時間波形の非対称性を除いてあまり大きくないと結論される。

参 考 文 献

- 1) Lamb, H.: Hydrodynamics, Dover Publication, 6th Ed., 1932, pp.529~531.
- 2) Havelock, T. H.: The Pressure of Water Waves upon a Fixed Obstacle, Proc. Royal Soc., Vol.175, 1940, pp.409~421.
- 3) MacCamy, R. C. and Fuchs, R. A.: Wave Forces on Piles; A Diffraction Theory, Tech.

- Mem., No. 69, BEB, 1954, pp.1~17.
- 4) Bonnefille, R. and Germain, P. : Wave Action on Isolated Vertical Cylinders of Large Dimension, IAHR, Congress, London, 1963, pp.311~318.
 - 5) Laird, A. D. K. : A Model Study of Wave Action on a Cylindrical Island, Trans. AGU, Vol.36, No.2, 1955, pp.270~285.
 - 6) Wang, H. : Loadings on Large Piers in Waves and Currents, Proc. 12th Conf. on Coastal Eng., 1970, pp.1491~1512.
 - 7) 田中 清 : 円形島による波浪の回折, 第3回海岸工学講演会講演集, 1956, pp.33~35.
 - 8) 大楠 丹 : 複数本の鉛直円柱に働く波力について, 日本造船学会論文集, 第131号, 1972, pp.53~64.
 - 9) 永井荘七郎・久保 直・時川和夫 : 超大円柱に働く波の圧力, 第21回土木学会年次学術講演会講演概要集, Ⅰ-71, 1966.
 - 10) 橋本 宏・白波瀬正道 : 大口径円柱に作用する波圧について, 第20回海岸工学講演会論文集, 1973, pp.13~17.
 - 11) 中村 宏・阿部宣行 : 発電所冷却水取水塔の水理, 第19回海岸工学講演会論文集, 1972, pp.391~394.
 - 12) 中村 宏・阿部宣行 : 海中の近接した2個の冷却水取水塔に作用する波力, 第20回海岸工学講演会論文集, 1973, pp.31~35.
 - 13) 堀川清司・渡辺 晃・勝井秀博 : 円柱に作用する砕波力に関する研究, 第20回海岸工学講演会論文集, 1973, pp.37~42.
 - 14) Chakrabarti, S. K. : Nonlinear Wave Forces on Vertical Cylinder, Proc. ASCE, Jour. Hydraulic Div., Vol.98, HY11, 1972, pp.1895~1909.

4. 壁体に作用する重複波の波圧に関する研究

4.1 概 説

鉛直な壁をもつ防波堤や護岸に波が連続的に入射して、完全に反射されるとき、一般に壁の前面に重複波が形成され、波高が入射波高の2倍程度になり、大きな波力が防波堤や護岸に働く。この重複波については、Sainflou¹⁾、Gourret²⁾、Miche³⁾、Biesel⁴⁾、Carry⁵⁾、PennyおよびPrice⁶⁾、Taylor⁷⁾、SuquetおよびWallet⁸⁾、d'Hier⁹⁾ら多くの研究者によって研究が進められてきた。そして、1960年 Tadjbakhsh および Keller¹⁰⁾ がせつ動法を用いて、2つの付加的条件を加えた有限振幅浅水重複波の第3次近似解を求めた。さらに最近では、同様な手法による合田ら¹¹⁾の有限振幅浅水重複波の第4次近似解、Mackら¹²⁾の第5次近似解、表面張力の影響を考慮した Concus¹³⁾の第3次近似解、波動運動を3次元的に扱った Vermaら¹⁴⁾の第2次近似解、シリンダーの中の軸対称の有限振幅重複波の問題を解いた Mack¹⁵⁾の第3次近似解、斜め入射波の場合を解いた浜田¹⁶⁾の第2次近似解および非線型浅水波理論の手法によって、クノイド波の相互干渉の問題として解いた首藤¹⁷⁾の有限振幅定常長波の第2次近似解など多くの研究がなされてきた。しかしながら、この手法は形式的解法であり、一般には数学的になんら収束の保証は与えられていないので、当然その物理現象に対する適合性と適用範囲が問題にされる。

また、重複波を対象として防波堤などの港湾外郭施設を設計する場合、防波堤前面における水位変動はきわめて大きく、しばしば防波堤を越波することが考えられる。こうした越波あるいは越流を伴う場合の重複波的な波の波圧についてはいまだ系統的な研究がなされていないが、通常の設計便覧では越波を伴わない完全重複波の波圧から天端高より高い部分の波圧を差し引いたものが作用するとしているようである。しかし、永井¹⁸⁾は直立壁の天端高が低く、相当量の波が天端を越す場合には、全く越波しない場合に比べて、波圧強度は一般に静水面付近から水底までわずかに減少すると述べている。一方、浜田ら¹⁹⁾は砕波状態の波に対して直立壁に作用する波圧に関する実験を行ない、天端高によって波圧がかなり変化し、天端高が低く、越波がある程度許された場合には、砕波圧の波形の2番目のピークが消失することを指摘している。このように、重複波の状態での波であれ、砕波の状態での波であれ、越波が伴う場合にはその波圧特性が越波のない場合に比べてかなり変化すると考えられるが、ここで問題とする重複波の場合に対しては、上述の方法が妥当であるかどうか、さらに、越波のない場合に比べて、波圧特性がどのように変化するかなど不明な点が少なくない。

そこで、4.では有限振幅重複波理論の適合性と適用限界を明らかにするために、数値計算および実験からつぎの研究を実施する。

まず4.2において、自由表面での2つの非線型境界条件、すなわち自由表面における水粒子の運動を規定する運動学的な条件と Bernoulli の定理から自由表面での圧力が一定であることを示す力学的な条件をせつ動解がどの程度満足するかを調べて、これらせつ動解の理論的適合性を解の近似度との関連において検討する。

つづいて、4.3において、重複波の波圧特性を中心とした系統的な実験を $6 \leq T\sqrt{g/h} \leq 20$ (ここに、

T : 周期, h : 水深および g : 重力の加速度) の範囲で行ない, 波圧の時間的変化とともに, 壁面での水位変動の時間的変化を記録させ, 静水面上の波の峯高および波圧などを有限振幅重複波理論による理論曲線と比較検討するとともに, せつ動解の境界条件に対する誤差と実験結果に対する適合性との関係を考察する。

さらに, 4.4 では越波のある場合の重複波の波圧に関する実験を行ない, 天端高が低く, 重複波が直立壁を越波することによって, 直立壁前面波高および直立壁に作用する波圧が越波しない場合に比べてどのように変化するかを調べ, 壁面に形成される波動運動を完全重複波とみなして有限振幅重複波理論との比較を通じて, この理論が越波を伴う重複波の波圧現象をどの程度説明しうるかを考察する。

なお, 4.3 および 4.4 で考察するのは主として波圧に関するものであるが, その結果は波圧を全壁面にわたって積分した全波力についてもそのまま適用できると考えられる。

4.2 有限振幅重複波の理論式とその適合性

4.2.1 有限振幅重複波の基礎式とそのせつ動解

前述のように, 有限振幅重複波理論に関しては, 多くの理論解が見出されているが, 高次解になるほど複雑な式になり, また第3次近似解以上の解は Tadjbakhsh および Keller の手法によっているので, ここでは Tadjbakhsh および Keller の有限振幅浅水重複波理論の第3次近似解をその誘導方法も含めて示す。また, クノイド波の相互干渉から求められた首藤による有限振幅定常長波理論の第2近似解の結果について簡単に述べる。

いま, 非圧縮性完全流体における2次元運動とし, 非回転性を仮定する。図-4.1 に示すような座標系のもとで, 速度ポテンシャルを ϕ とし,

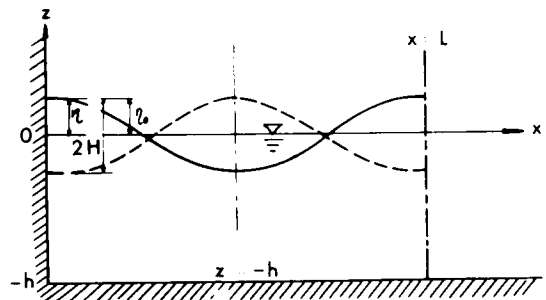


図-4.1 座 標 系

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{k^2 \phi}{\lambda \sqrt{k g}}, & \bar{\eta} &= \frac{k \eta}{\lambda}, & \bar{x} &= k x, & \bar{z} &= k z \\ \bar{t} &= \sigma t, & \bar{\omega} &= \frac{\sigma}{\sqrt{k g}}, & \bar{h} &= k h \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

で表わされる無次元量を用いれば, 連続方程式は次式となる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad ; \quad 0 \leq \bar{x} \leq \pi, \quad -\bar{h} \leq \bar{z} \leq \lambda \bar{\eta} \quad (4.2)$$

ここに, x および z : 静水面上にとられた水平および鉛直座標, $k = 2\pi/L$, L : 波長, η : 静水面からの水位変動, H : 重複波波高の1/2, $\sigma = 2\pi/T$, λ : 微小なパラメーターおよび t : 時間である。また, 無次元水平および鉛直水粒子速度は, それぞれ次式で定義される。

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{w} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \quad (4.3)$$

ついで、自由表面における運動学的条件と力学的条件は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} &= \omega \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \lambda \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} ; \quad \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \\ \omega \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} + \bar{\eta} &= 0 ; \quad \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

ただし、力学的条件に含まれる Bernoulli の定数項は第2式の左辺第1項に含まれるものとする。

壁面における境界条件は、法線方向を \bar{n} とすれば、

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{n}} = 0 ; \quad \bar{z} = -\bar{h} \text{ および } \bar{x} = 0, \pi \quad (4.5)$$

となる。また、重複波の運動に対して次式で表わされる平均水面の条件および運動が周期的であるための条件を必要とする。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi \bar{\eta} d\bar{x} &= 0 \\ \nabla \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}) &= \nabla \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t} + 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

さらに、重複波であるための付加条件として、 $\bar{\eta}$ および $\bar{\phi}$ はそれぞれ、 $\bar{\eta}$ が $\cos \bar{t} \cos \bar{x}$ を含まないという位相関係を規定する条件および第1次近似における振幅を表わす条件

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{\eta} \cos \bar{t} \cos \bar{x} d\bar{t} d\bar{x} &= 0 \\ \int_{-\bar{h}}^0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{\phi} \cos \bar{t} \cos \bar{x} d\bar{t} d\bar{x} d\bar{z} &= \frac{1}{2} \pi^2 (\tanh \bar{h})^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

を満足しなければならない。以上、式(4.4)～(4.7)の境界条件および付加条件のもとで式(4.2)を満足する解を見出せば、問題が解かれたことになる。式(4.4)は未知水面における非線型境界条件であるが、前述したように基礎方程式に微小なパラメーターが含まれているので、近似解を求めるためには、せつ動法が適用できる。すなわち、微小量のパラメーター λ についてのせつ動解として、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 + \lambda \bar{\phi}_1 + \frac{\lambda^2}{2} \bar{\phi}_2 + \dots \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}_0 + \lambda \bar{\eta}_1 + \frac{\lambda^2}{2} \bar{\eta}_2 + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \lambda \omega_1 + \frac{\lambda^2}{2} \omega_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

を仮定して、式(4.8)を式(4.2)、(4.4)および(4.5)に代入し、 λ の次数ごとに整理すると、 $\bar{\phi}_i$

および $\bar{\eta}_i$ に関する方程式および線型の境界条件が得られる。それらを式 (4.6) および (4.7) の条件を用いて逐次解いていけば、それぞれの次数に相当した近似解が求められる。

以上の方法によって Tadjbakhsh らは第3次近似解を、合田らは第4次近似解を、さらに Mack らは第5次近似解を求めている。さて、Tadjbakhsh らの第3次近似解によれば、まず水位変動は

$$\left. \begin{aligned} k\eta &= \lambda \sin \sigma t \cos kx + \frac{\lambda^2}{8} \{ (\omega_0^2 + \omega_0^{-2}) + (\omega_0^{-2} - 3\omega_0^{-6}) \cos 2\sigma t \} \cos 2kx \\ &+ \frac{\lambda^3}{2} \{ b_{11} \sin \sigma t \cos kx + b_{13} \sin \sigma t \cos 3kx + b_{31} \sin 3\sigma t \cos kx \\ &+ b_{33} \sin 3\sigma t \cos 3kx \} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

となり、壁面における静水面上の波の峯高 η_0 は

$$k\eta_0 = kH + \frac{\lambda^2}{8} (3\omega_0^{-6} + \omega_0^2) \quad (4.10)$$

で表わされる。また、速度ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{\sqrt{kq}}{k^2} \left[\frac{\lambda \omega_0}{\sinh kh} \cosh k(h+z) \cos \sigma t \cos kx + \lambda^2 \left\{ \beta_0 + \frac{1}{8} (\omega_0 - \omega_0^{-3}) t \right. \right. \\ &- \frac{1}{16} (3\omega_0 + \omega_0^{-3}) \sin 2\sigma t - \frac{3}{16} (\omega_0 - \omega_0^{-7}) \frac{\cosh 2k(h+z)}{\cosh 2kh} \sin 2\sigma t \cos 2kx \} \\ &+ \frac{\lambda^3}{2} \{ \beta_2 + \beta_{13} \cosh 3k(h+z) \cos \sigma t \cos 3kx + \beta_{31} \cosh k(h+z) \cos 3\sigma t \cos kx \\ &+ \beta_{33} \cosh 3k(h+z) \cos 3\sigma t \cos 3kx \} \left. \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

つぎに、壁面での圧力は、Bernoulli の定理から次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{kp}{\rho g} &= -kz + \frac{\lambda^2}{8} \left\{ (\omega_0^{-2} - \omega_0^2) - \frac{4 \sinh^2 k(h+z)}{\sinh 2kh} \right\} + \left\{ \lambda + \frac{\lambda^3}{64} (9\omega_0^{-8} - 5 + 2\omega_0^4) \right. \\ &\frac{\cosh 3k(h+z)}{\cosh 3kh} + \frac{3\lambda^3}{16} (\omega_0^{-6} - \omega_0^2) \frac{\sinh k(h+z) \sinh 2k(h+z)}{\sinh kh \cosh 2kh} \} \sin \sigma t \\ &+ \frac{\lambda^2}{8} \left\{ (3\omega_0^2 + \omega_0^{-2}) - 3(\omega_0^{-6} - \omega_0^2) \frac{\cosh 2k(h+z)}{\cosh 2kh} - \frac{4 \sinh^2 k(h+z)}{\sinh 2kh} \right\} \cos 2\sigma t \\ &+ \frac{\lambda^3}{256} \left\{ 3(9\omega_0^{-8} + 62\omega_0^{-4} - 31) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} - (1 + 3\omega_0^4) (27\omega_0^{-12} - 66\omega_0^{-8} - 139\omega_0^{-4}) \right. \\ &\frac{\cosh 3k(h+z)}{\cosh 3kh} - 48(\omega_0^{-6} - \omega_0^{-2}) \frac{\sinh k(h+z) \sinh 2k(h+z)}{\sinh kh \cosh 2kh} \} \sin 3\sigma t \left. \right\} \quad (4.12) \end{aligned}$$

ここに、 ρ ：流体の密度である。

さらに、波長は、

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh kh \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{64} (9\omega_0^{-8} - 12\omega_0^{-4} - 3 - 2\omega_0^4) \right\}^2 \quad (4.13)$$

となり、また H と λ との関係は次式で与えられる。

$$kH = \lambda + \frac{\lambda^3}{256} (27\omega_0^{-12} + 27\omega_0^{-8} + 96\omega_0^{-4} - 63 + 11\omega_0^4 + 6\omega_0^8) \quad (4.14)$$

ここに、 $\omega_0^2 = \tanh kh$ であり、また β_0, β_2 : 定数および $b_{11}, b_{13}, b_{31}, b_{33}, \beta_{13}, \beta_{31}, \beta_{33}$: kh の与えられた関数である。

一方、首藤の有限振幅定常長波の第2近似解によれば、波の特性はつぎのように表わされる。

まず、水位変動は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta}{H} = & \left\{ \operatorname{cn}^2[\alpha(\tau - ct)] + \operatorname{cn}^2[\alpha(\tau + ct)] - \frac{1}{\kappa^2} \left(\kappa^2 - 1 + \frac{E}{K} \right) \right\} + \left[\frac{3}{4} \{ \operatorname{cn}^4[\alpha(\tau - ct)] \right. \\ & + \operatorname{cn}^4[\alpha(\tau + ct)] \} + \frac{1}{2} \operatorname{cn}^2[\alpha(\tau - ct)] \operatorname{cn}^2[\alpha(\tau + ct)] - \{ \operatorname{cn}^2[\alpha(\tau - ct)] \\ & + \operatorname{cn}^2[\alpha(\tau + ct)] \} - \frac{1}{2\kappa^2} \{ \operatorname{sn}[\alpha(\tau - ct)] \operatorname{cn}[\alpha(\tau - ct)] \operatorname{dn}[\alpha(\tau - ct)] \\ & \operatorname{Z}[\alpha(\tau + ct)] + \operatorname{sn}[\alpha(\tau + ct)] \operatorname{cn}[\alpha(\tau + ct)] \operatorname{dn}[\alpha(\tau + ct)] \operatorname{Z}[\alpha(\tau - ct)] \} \\ & \left. + \frac{1}{2\kappa^4} \left\{ (\kappa^2 + 2)(\kappa^2 - 1) + 2 \frac{E}{K} \right\} \right] \left(\frac{H}{h} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

となり、壁面における静水面上の波の峯高は

$$\frac{\eta_0}{H} = 2 - \frac{1}{\kappa^2} \left(\kappa^2 - 1 + \frac{E}{K} \right) + \frac{1}{2\kappa^4} \left(\kappa^4 + 3\kappa^2 - 2 + 2 \frac{E}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right) \quad (4.16)$$

で表わされる。ここに κ : だ円関数の母数、 K および E : 第1種および第2種完全だ円積分、 cn , sn および dn : Jacobi のだ円関数である。さらに、 $\operatorname{Z}(X)$ は

$$\operatorname{Z}(X) = E(X) - \frac{E}{K} X = \int_0^X \operatorname{dn}^2 X dX - \frac{E}{K} X \quad (4.17)$$

で定義される関数である。

つぎに、壁面での波圧に対しては、

$$\frac{p}{\rho g H} = \frac{\eta - z}{H} - \frac{3}{4\kappa^2} \left\{ 2 \frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \{ 2(1 - \kappa^2) - 4(1 - 2\kappa^2) \operatorname{cn}^2 \alpha c t - 6\kappa^2 \operatorname{cn}^4 \alpha c t \} \left(\frac{H}{h} \right) \quad (4.18)$$

であり、波速は

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2\kappa^2} \left(2 - \kappa^2 - 3 \frac{E}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right) + \frac{1}{40\kappa^4} \left\{ -56 + 56\kappa^2 - 11\kappa^4 - 70(\kappa^2 - 2) \frac{E}{K} - 75 \left(\frac{E}{K} \right)^2 \right\} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \quad (4.19)$$

で表わされる。ここに、

$$\alpha^2 = \frac{1}{4\kappa^2 h^2} \left\{ \frac{H}{h} - \frac{1}{2\kappa^2} \left(6 - 3\kappa^2 - 7 \frac{E}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right\} \quad (4.20)$$

である。また、波長は次式で与えられる。

$$\alpha L = 2K \quad (4.21)$$

4.2.2 セツ動解の自由表面境界条件に対する適合性

(1) 自由表面での境界条件

有限振幅波理論の解が前述したように、近似解にとどまるかぎり、非線型条件である自由表面での運動学的条件と力学的な条件は厳密に満足されず、つねに残差項を残している。そこで、これらの近似解に種々の条件を与えて、上述の境界条件の誤差を計算し、それらを比較して、近似度を高めることにより、境界条件の適合性が改善されているかどうかを調べよう。

いま、運動学的な条件の誤差を ϵ'_1 とし、また力学的な条件の誤差を ϵ'_2 とすると、それらはつぎのように与えられる。

$$\epsilon'_1 = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} - \omega \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} - \lambda \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \quad ; \quad \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \quad (4.22)$$

$$\epsilon'_2 = \omega \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} + \bar{\eta} \quad ; \quad \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \quad (4.23)$$

そして、もしセツ動解が自由表面における運動学的な条件および力学的な条件を完全に満足しているならば、当然 $\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = 0$ となるはずである。したがって、有限振幅重複波の理論解を式(4.22)および(4.23)に代入して、その誤差の大きさを比較することにより、もっとも好ましい理論解がどれであるかを知ることができる。

ところで、式(4.22)および(4.23)は波長に関する無次元量であるが、有限振幅重複波理論の第3次および第4次近似解の波長は、式(4.13)から明らかなように、周期ばかりでなく波高にも関係する。すなわち、Tadjbakhshらにより指摘されたように、 $h/L : 0.170$ を境界として、これより深いところでは波高の増大により波長が減少し、これより浅いところでは波長が増大するので、セツ動解の適合性を比較する場合の指標として採用することはできない。そこで、ここでは式(4.22)および(4.23)のかわりに、次式を用いる。

$$\epsilon_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{kh}} \epsilon'_1 \quad (4.24)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\lambda}{kh} \epsilon_2' \quad (4.25)$$

また、壁面における水面条件の誤差をつぎのような形の量で評価することにする。すなわち、Dean²⁰⁾にならって、運動学的な条件および力学的な条件について

$$(E_1)_R = (\epsilon_1)_{max} - (\epsilon_2)_{min} \quad (4.26)$$

$$(E_2)_R = (\epsilon_2)_{max} - (\epsilon_2)_{min} \quad (4.27)$$

を定義する。さらに、式(4.26)および(4.27)とは別の criterion として、root-mean-square に対する Simpson's rule numerical approximation²¹⁾を採用すれば、上記の式(4.26)および(4.27)に対応して、次式が定義される。

$$(E_3)_R = \sqrt{\epsilon_1^2} = \sqrt{\frac{1}{3(M-1)} \sum_{i=1,3,\dots}^{M-1} \{(\epsilon_1)_{i-1}^2 + 4(\epsilon_1)_i^2 + (\epsilon_1)_{i+1}^2\}} \quad (4.28)$$

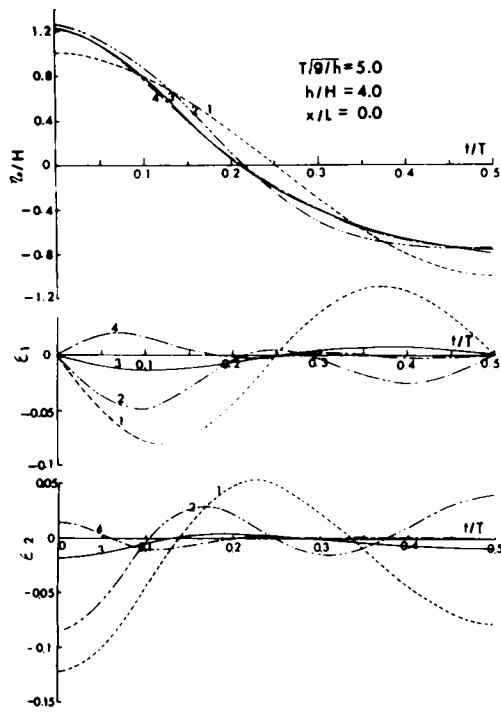
$$(E_4)_R = \sqrt{\epsilon_2^2} = \sqrt{\frac{1}{3(M-1)} \sum_{i=1,3,\dots}^{M-1} \{(\epsilon_2)_{i-1}^2 + 4(\epsilon_2)_i^2 + (\epsilon_2)_{i+1}^2\}} \quad (4.29)$$

ここに、 $(\epsilon_i)_{max}$ および $(\epsilon_i)_{min}$: それぞれ各点で計算した誤差のうち、最大のものと最小のもの、 M : 計算点の個数であり、また $\bar{}$ は平均を示す。これら2つの criterion はいずれも壁面において、自由表面の境界条件に対する適合性を全位相について平均的に評価する基準であり、それぞれ、誤差の位相に関する最大変化量および自乗平均値を表わすので、後者の criterion の方が全位相についての誤差変化をより平均的に評価する基準であるといえる。なお、上記の criterion に基づいて有限振幅重複波理論の適合性を検討するにあたっては、前述した第4次近似までの解を用いることにする。

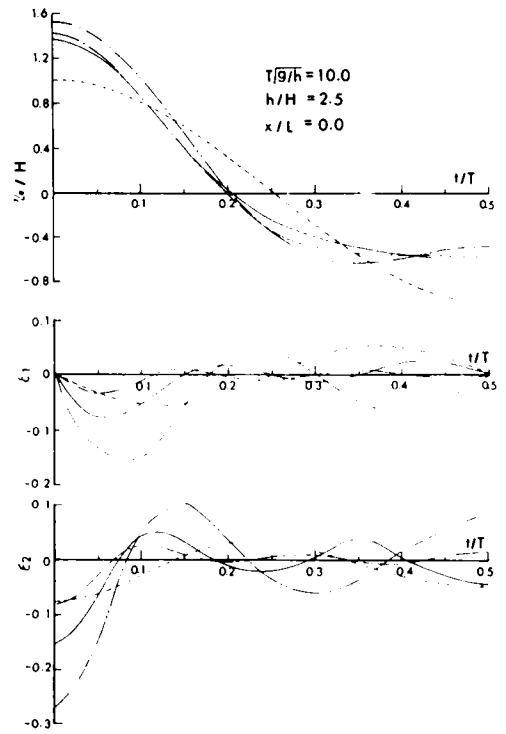
(2) 有限振幅重複波理論の適合性

図-4.2は、各理論解ごとに $T\sqrt{g/h}$ と h/H の値を与えて、式(1.24)および(4.25)であらわされる ϵ_1 および ϵ_2 を計算し、 t/T による変化として示したものである。図中の点線は第1次近似解、2点鎖線は第2次近似解、実線は第3次近似解を示し、また1点鎖線は第4次近似解を示す。

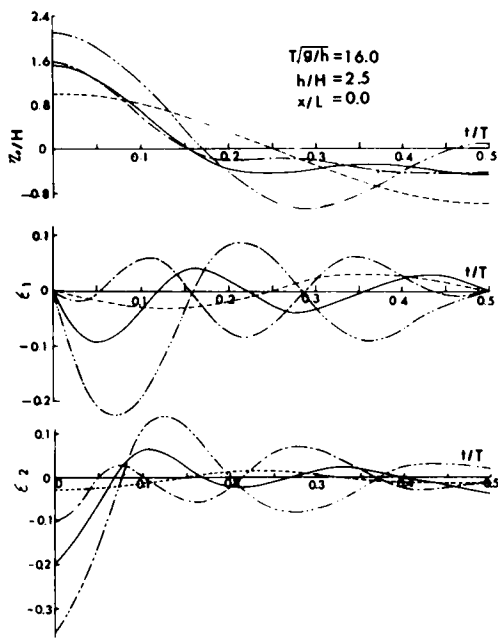
これらの図によれば、 $T\sqrt{g/h}$ の値の小さい範囲では、 h/H の値がかなり小さくても、第2次近似解を除いて解の近似度が高いものほど、いずれの境界条件に対する適合の程度もよくなり、せつ動解の有効性が認められる。しかし、 $T\sqrt{g/h}$ の値が増加するにつれて、 h/H の値の小さい場合には、第2次近似解および第3次近似解が第1次近似解より境界条件に対する適合性が悪くなる。さらに、 $T\sqrt{g/h}$ の値が増加すれば、これらの理論解のうち、第1次近似解の適合性がむしろもっともよいといった結果が見出され、このことから、せつ動解の適用範囲が存在することがわかる。つぎに、壁面における各近似解の $(E_1)_R$ 、 $(E_2)_R$ 、 $(E_3)_R$ および $(E_4)_R$ を一定の h/H の値に対して $T\sqrt{g/h}$ との関係で図示したのが図-4.3である。図中の黒丸は各近似解による重複波の碎波点である。これらの図から、第4次近似解は、力学的条



(a)



(b)



(c)

図-4.2 ϵ_1 および ϵ_2 の t/T による変化

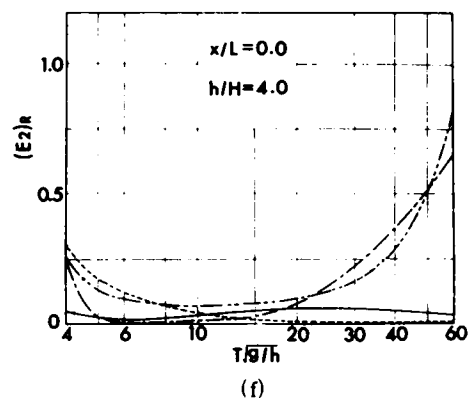
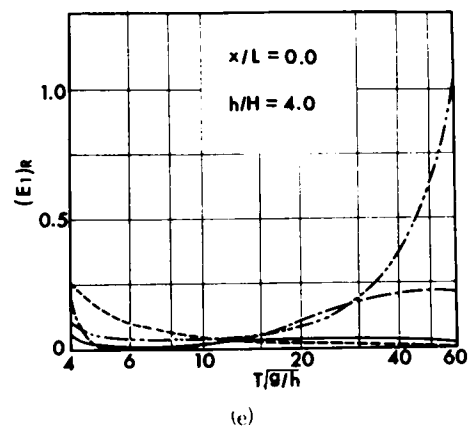
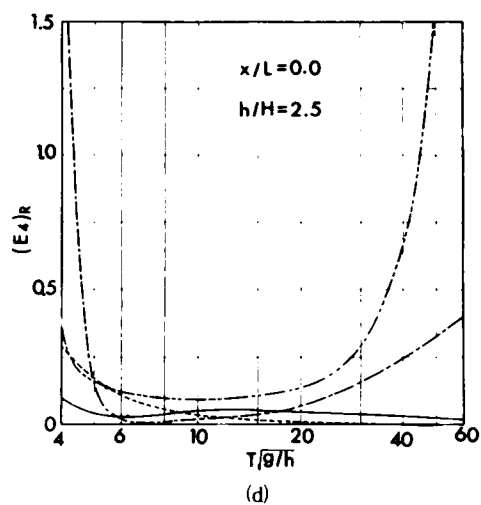
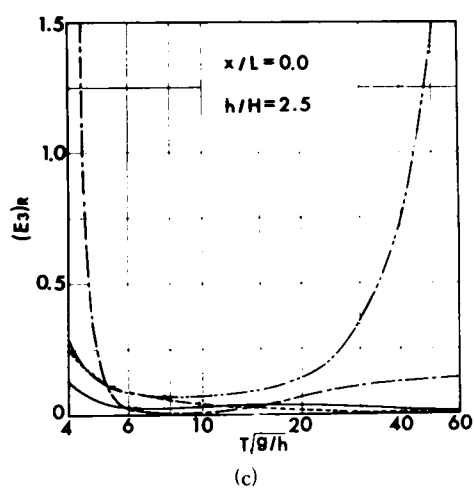
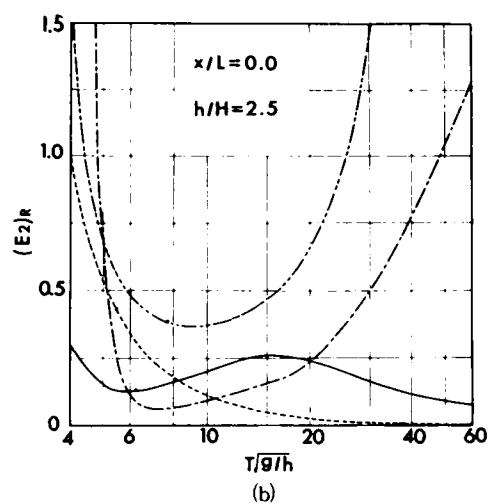
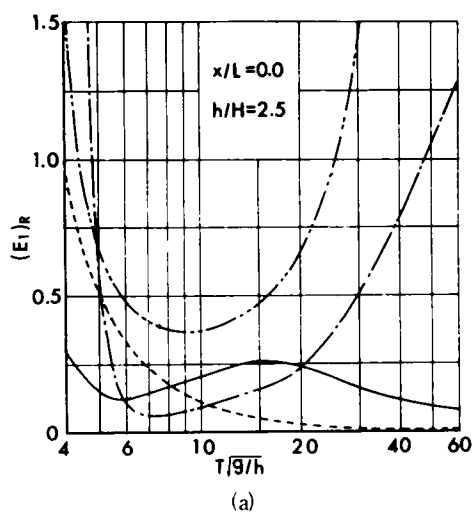


图-4.3

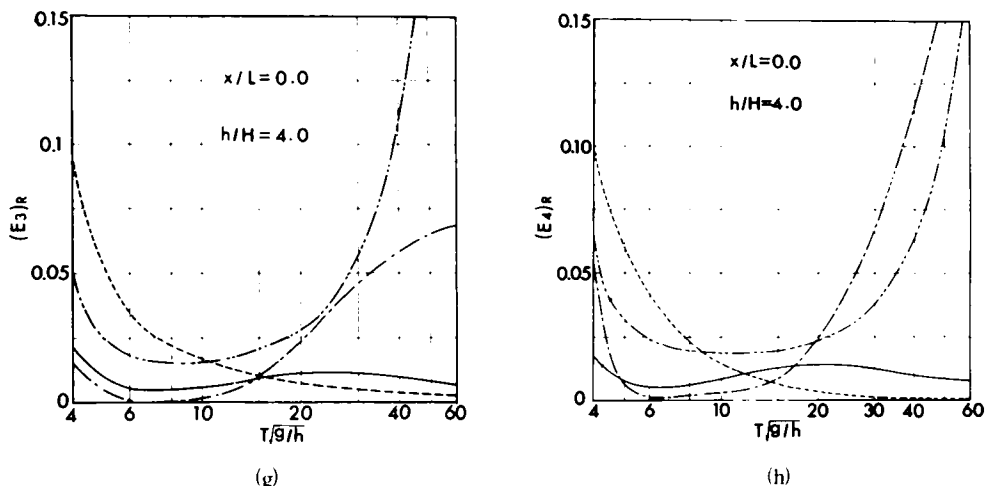


図-4.3 $(E_1)_R$, $(E_2)_R$, $(E_3)_R$ および $(E_4)_R$ の $T\sqrt{q/h}$ による変化

件の場合にはおおよそ $6 < T\sqrt{q/h} < 11$, 運動学的条件の場合には $6 < T\sqrt{q/h} < 13$ の範囲でもっとも境界条件の適合性がよいが, そのほかの範囲では第1次および第3次近似解よりも悪くなっており, せつ動解のもつ限界があらわれていること, 第1次近似解は $T\sqrt{q/h}$ の値が大きいところでは, 他の近似解よりも境界条件の適合性がよいのは第1次近似解がもっともよく物理現象を説明するというよりむしろ $T\sqrt{q/h}$ の値が大きくなると, 有限振幅重複波理論の解の高次項が基本項より大きくなり, そのため境界条件に対する誤差が大きくなるといったせつ動解の欠陥を示すものと解すべきであること, さらに第2次近似解は一般に近似度が不足しているために, h/H の値が小さくなると, 境界条件の適合性が第1次近似解よりよい範囲がきわめて限られることなどがわかる。ただし, このせつ動解の有効性が認められる $T\sqrt{q/h}$ の範囲は前述した誤差の評価基準によって若干異なっており, 式(4.28)および(4.29)による領域は式(4.26)および(4.27)によるものより若干広い。このことはそれぞれの criterion の意味から考えて, より平均的な意味においては, 壁面での全位相についての自由表面の境界条件に対するせつ動解の適合性がよいことを示すものといえる。また, h/H の値が大きい場合には, 当然のことながらせつ動解の有効性の認められる $T\sqrt{q/h}$ の領域が広くなる。

図-4.4 は壁面における境界条件の誤差 $(E_1)_R$ および $(E_2)_R$ と h/H との関係の1例を示したものであって, いずれの境界条件の誤差も h/H の値の減少とともに急激に増大しており, せつ動解は h/H の値が減少すると, 急激に境界条件に対する適合性が悪くなる。これらの結果を総合して, 近似度をあげることにによりそれぞれの境界条件の誤差が減少する各近似解の範囲(たとえば, 第3次近似解の場合には第1次および第2次近似解よりも境界条件の誤差が減少する範囲)を各 criterion にしたがって示したのが図-4.5 である。これによれば, 各近似解の領域が境界条件の種類により, またその criterion の取り方により多少異なっているが, せつ動解にはそれぞれの近似度によりその限界が現われていることがわかる。以上の考察は壁面におけるものであるが, 境界条件の適合性を考えるとき, 波動運動全体における

適合性を検討する必要も考えられる。

そこで、式(4.28)および(4.29)にならって、さらに次式で表わされる criterion を定義することにする。

$$(E_3)_{RR} = \sqrt{(E_3)_R^2} = \sqrt{\frac{1}{3(M-1)} \sum_{i=1,3,\dots}^{M-1} [\{(E_3)_R\}_{i-1}^2 + 4\{(E_3)_R\}_i^2 + \{(E_3)_R\}_{i+1}^2]} \quad (4.30)$$

$$(E_4)_{RR} = \sqrt{(E_4)_R^2} = \sqrt{\frac{1}{3(M-1)} \sum_{i=1,3,\dots}^{M-1} [\{(E_4)_R\}_{i-1}^2 + 4\{(E_4)_R\}_i^2 + \{(E_4)_R\}_{i+1}^2]} \quad (4.31)$$

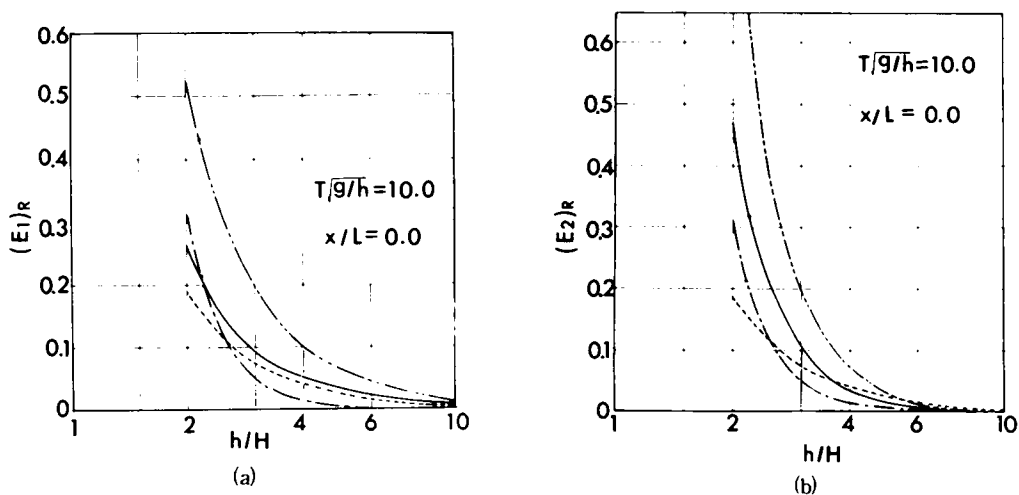


図-4.4 $(E_1)_R$ および $(E_2)_R$ の h/H による変化

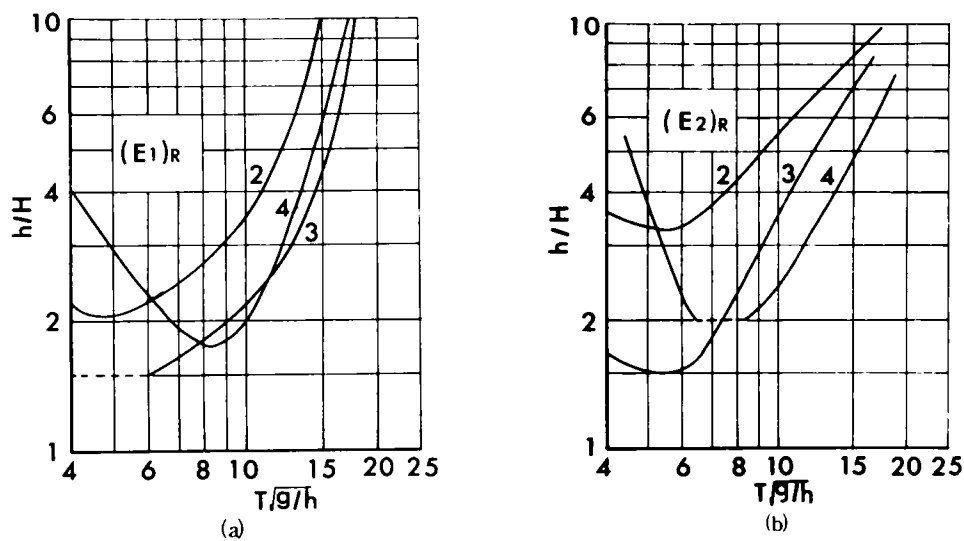


図-4.5

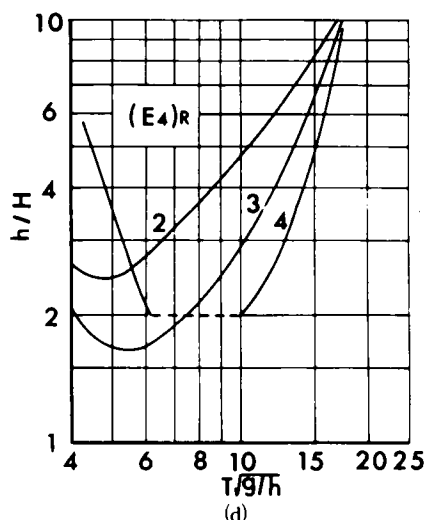
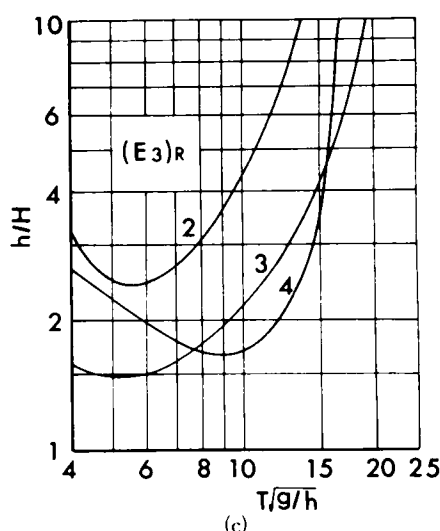


図-4.5 せつ動解によって境界条件の誤差が減少する領域(1)

この criterion は特定の位置における境界条件の誤差の位相に関する自乗平均値を一波長について、さらに自乗平均したものである。したがって、重複波の全運動場における有限振幅重複波理論解の境界条件に対する平均的な適合性を表わす基準と考えられる。

式(4.30)および(4.31)を用いて数値計算を行ない、その結果を図-4.5と同様に示したのが図-4.6である。図-4.5および図-4.6を比較すると、両者の範囲は一般に異なっているが、運動学的条件および力学的条件とも図-4.6に示す範囲の方が広がっていることがわかる。このことから、重複波の運動場全体におけるせつ動解の境界条件に対する平均的な適合性は壁面におけるものよりよいといえよう。

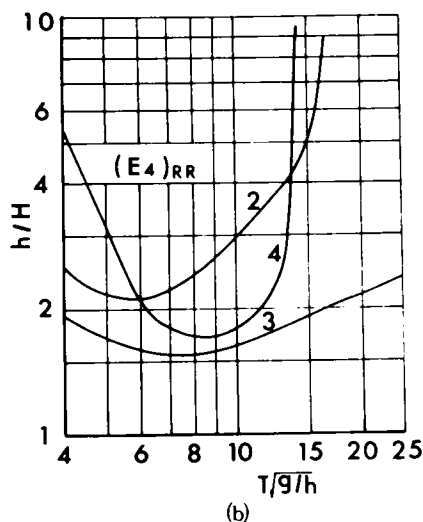
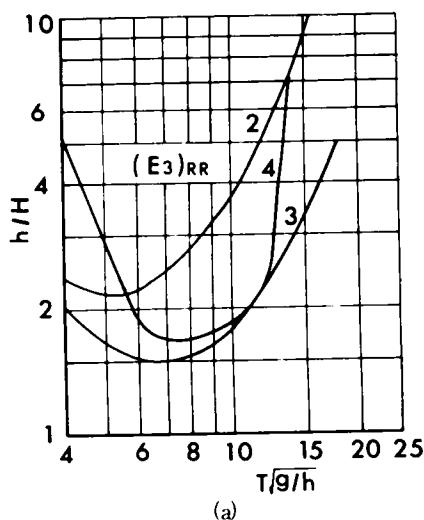


図-4.6 せつ動解によって境界条件の誤差が減少する領域(2)

ここで注意すべきことは、これらの図はあくまでせつ動解の適用限界の可能性を示すものであって適用限界そのものを示すものでなく、適用限界の究明には実験結果との比較によらなければならないことである。

4.3 有限振幅重複波理論の波圧に関する適用限界

4.2において述べたように、せつ動法を用いて求めた有限振幅重複波理論には、ある適用限界が存在することがわかったが、一方、Deanは進行波について微小振幅波、Stokes波、クノイド波および孤立波のそれぞれに対する境界条件の適合性を4.2で述べた基準に従って検討し、 $T\sqrt{g/h}$ の値の大きいところで微小振幅波理論が最適性を示す範囲が存在することを見出した。しかしながら、現在までの多くの研究に照らしあわせてみれば明かなように、この結果は微小振幅波理論が他の理論解より現象をよく説明することを意味するのではなく、境界条件の適合性が十分でなくとも、ある程度物理現象を説明できるという現在の有限振幅重複波理論の欠陥を示しているだけである。また、境界条件の適合性の基準も絶対的なものではなく、相対的なものである。したがって、これらの理論の妥当性を検討し、その適用限界を明らかにするためには、あくまで実験によって理論結果を検証しなければならない。それゆえ、ここでは重複波の波圧特性を中心とした系統的な実験を $6 \leq T\sqrt{g/h} \leq 20$ の範囲で行なって得た壁面での水位変動および波圧の実験結果と理論結果との比較から有限振幅重複波理論の適合性および適用限界をさらに検討することにしたい。

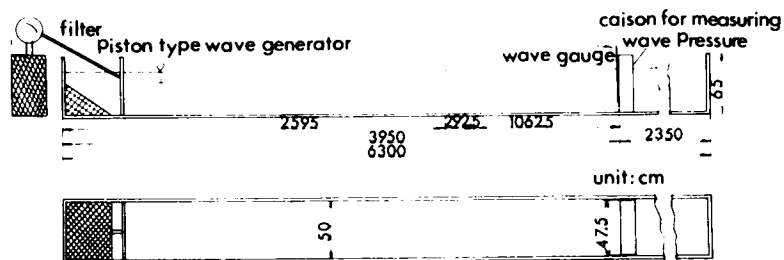
4.3.1 実験装置および実験方法

実験に用いた水槽は図-2.2に示した波浪基礎実験水槽である。実験では、造波機端より約39.5mの位置に5個の圧力変換器を取り付けた鋼製のケーソンを設置して壁面での反射により重複波を形成させ、壁面での水位変動および波圧の時間的変化を測定した。水位変動および波圧の測定にはそれぞれ電気抵抗線式波高計およびひずみゲージ式圧力変換器を用いた。

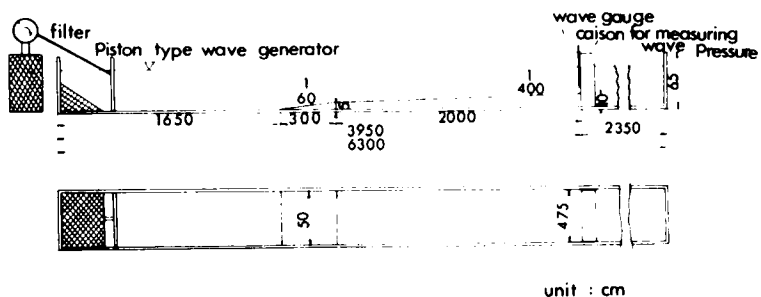
実験では $T\sqrt{g/h}$ の値が一定になるように周期および水深を決め、波高を変化させたが、一様水深の実験では h/H の値が約2.8以下の波が起らず、十分波高の大きい波が得られなかったため、水槽底面に1/60(3mの区間)および1/400(20mの区間)のきわめて緩やかなこう配を付け、ケーソン前面で一様水深部より10cm高くなるようにした。その結果、砕波近くの十分波高の大きく、しかもほぼ対称な波形をもつ波が得られた。図-4.7は実験装置の概略を示したものである。記録の処理にあたっては造波機始動後の数波と造波板の反射の入った波を除いた4～5波をとり、その平均値を用いた。表-4.1に実験条件および実験波の特性を一括して示す。

4.3.2 実験結果およびその考察

図-4.8は静水面上の波の峯高の実験結果と有限振幅重複波理論による理論曲線とを比較したものである。図中の1点鎖線は第4次近似解、太い実線は第3次近似解、2点鎖線は第2次近似解および細い実線は首藤による有限振幅定常長波の第2近似解であり、図中の黒丸はPennyおよびPriceの砕波条件より求めた重複波の砕波点を示す。なお、有限振幅重複波理論の第4次近似解までの砕波点はすでに合田により計算されており、また有限振幅定常長波の第2近似解の砕波点は重複波の腹(たとえば壁面)における



(a)

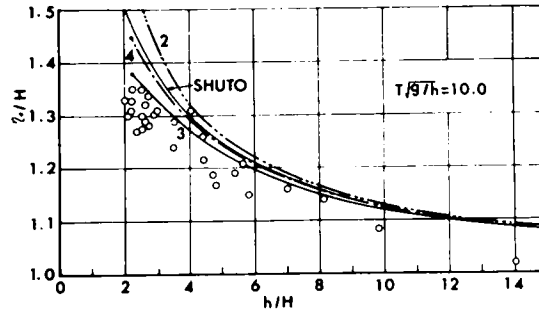


(b)

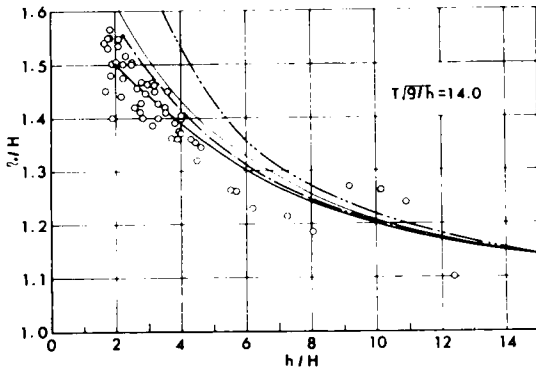
図-4.7 実験装置の概略図

表-4.1 実験条件および実験波の特性

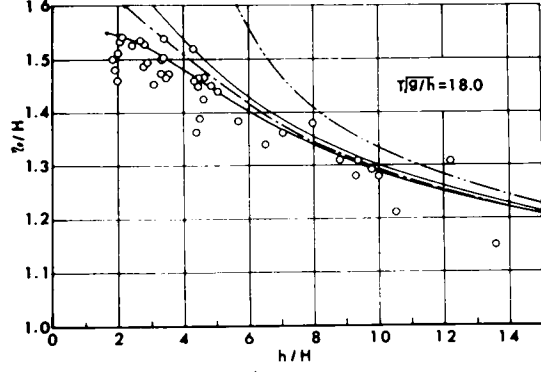
周期 T_{sec}	水深 H_{cm}	$T\sqrt{g/h}$	半波高 H_{cm}
0.96	25.0	6.00	2.1 ~ 10.7
0.86	20.0	6.00	3.2 ~ 6.7
1.28	25.0	8.00	3.0 ~ 7.1
1.14	20.0	8.00	1.5 ~ 10.5
1.07	17.5	8.00	4.3 ~ 5.8
1.60	25.0	10.0	3.1 ~ 8.4
1.43	20.0	10.0	1.4 ~ 10.0
1.34	17.5	10.0	3.0 ~ 5.0
1.71	20.0	12.0	3.0 ~ 5.9
1.60	17.5	12.0	1.0 ~ 9.5
1.49	15.0	12.0	1.5 ~ 4.3
2.00	20.0	14.0	1.8 ~ 6.1
1.73	15.0	14.0	1.2 ~ 9.2
1.98	15.0	16.0	1.0 ~ 9.2
1.81	12.5	16.0	2.4 ~ 2.6
2.03	12.5	18.0	1.0 ~ 6.8
1.82	10.0	18.0	0.7 ~ 2.3
2.02	10.0	20.0	1.2 ~ 5.0



(a)



(b)



(c)

図-4.8 η_0/H の h/H による変化

鉛直方向の水粒子加速度が重力の加速度に等しいという Penny および Price の砕波条件

$$\left(\frac{dw}{dt} \right)_{x=t=0} + g = 0 \quad (4.32)$$

$z=\eta$

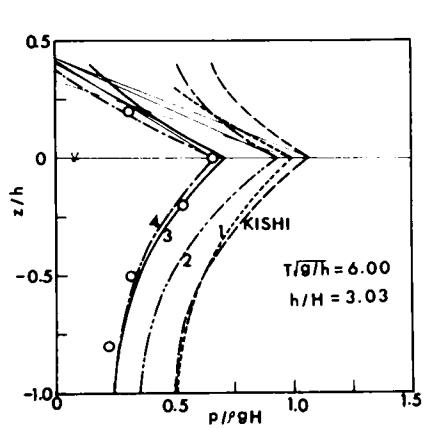
から求められた次式を用いて数値計算した。

$$2K \frac{H}{h} - \frac{1}{\pi} T \sqrt{\frac{g}{h}} \left\{ \frac{\eta_0}{H} \left(\frac{H}{h} \right) + 1 \right\} \left(\frac{H}{h} \right)^{3/2} - \frac{1}{2} T \sqrt{\frac{g}{h}} = 0 \quad (4.33)$$

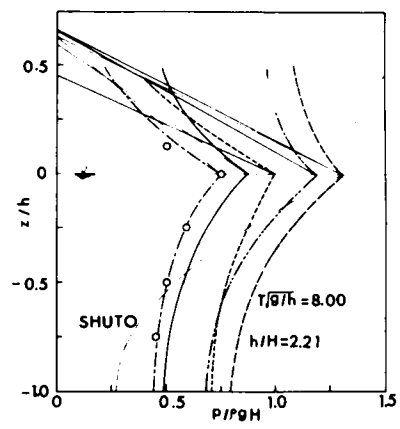
また、第1次近似解は波形が上下対称であるので、つねに $\eta_0/H = 1$ になり、図には示していない。

さて、これらの図から、図-4.8(a)のように比較的周期の短い波の場合にも、また、図-4.8(b)および(c)のように周期の長い波の場合にも理論曲線と実験結果は比較的よく一致していることがわかる。ただ、第2次近似解は h/H の値が小さくなると、解の近似度の不足のために実験結果よりもかなり大きくなり、その傾向は $T\sqrt{g/h}$ の値の大きいときほど著しい。

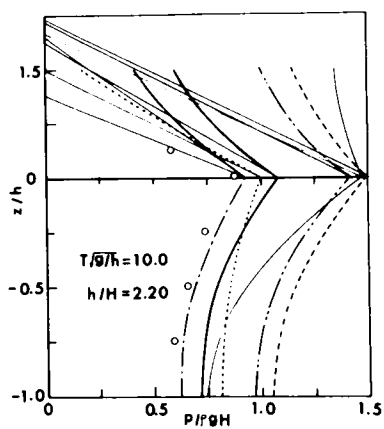
図-4.9 は波の峯の位相での鉛直同時波圧分布について実験結果と理論曲線との比較を行なったものである。重複波の波圧波形にはよく知られているように、波形こう配が大きくなると、双峯型のものが現われるので、一般に最大鉛直同時波圧分布は、波の峯での鉛直同時波圧分布とは一致しない。鉛直同時波圧分布



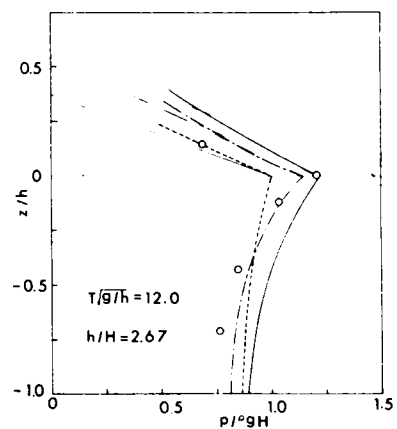
(a)



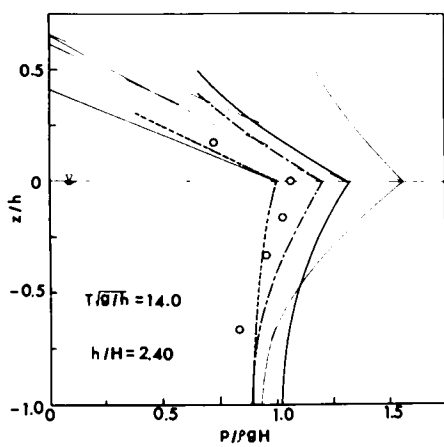
(b)



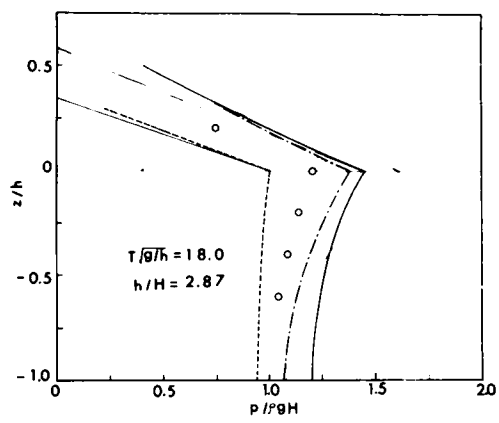
(c)



(d)



(e)



(f)

図-4.9 波圧の鉛直分布

を考察する場合には、最大鉛直同時波圧分布を取り扱うほうが望ましいが、最大鉛直同時波圧分布の発生する位相はこの双峯性のために波の特性に応じて変わり、これを検討することは非常に労力を要し、またその結果の精度も十分保証しがたいので、ここでは波の峯での鉛直同時波圧分布を扱うことにした。さて、これらの有限振幅重複波理論はくりかえし述べたように、いわゆる近似理論であるので、自由表面での圧力条件が厳密に満足されておらず、圧力式においても残差を生ずる。この改良の方法の1つが合田の補正法であるが、ここでは高次級数解の現象に対する妥当性を検討する意味からこのような補正は行わず、静水面上では三角形分布をするものと仮定して、各理論解の水位最大の点と静水面での圧力の値を細線で結んだ。これらの図によれば、 $T\sqrt{g/h}$ の値がそれほど大きくない場合には、 h/H の値がかなり小さく、碎波限界に近い場合でも解の高次化の効果が現われて、第4次近似解は実験結果との適合性がきわめてよいが、 $T\sqrt{g/h}$ の値が増加するにつれて、両者のへだたりが現われることがわかる。

一方、式(4.18)による定常長波の第2近似解は h/H の値が小さいときにはかなり過大な値を与え、しかもLaitoneのクノイド波の第2近似解と同様に鉛直方向に急激に増大する分布形状を示している。

図-4.10は各測定点における波の峯の位相での無次元波圧強度について実験結果と理論曲線とを比較したものである。ここに、図中の点線は第1次近似解、破線は岸の第2次近似解²²⁾である。

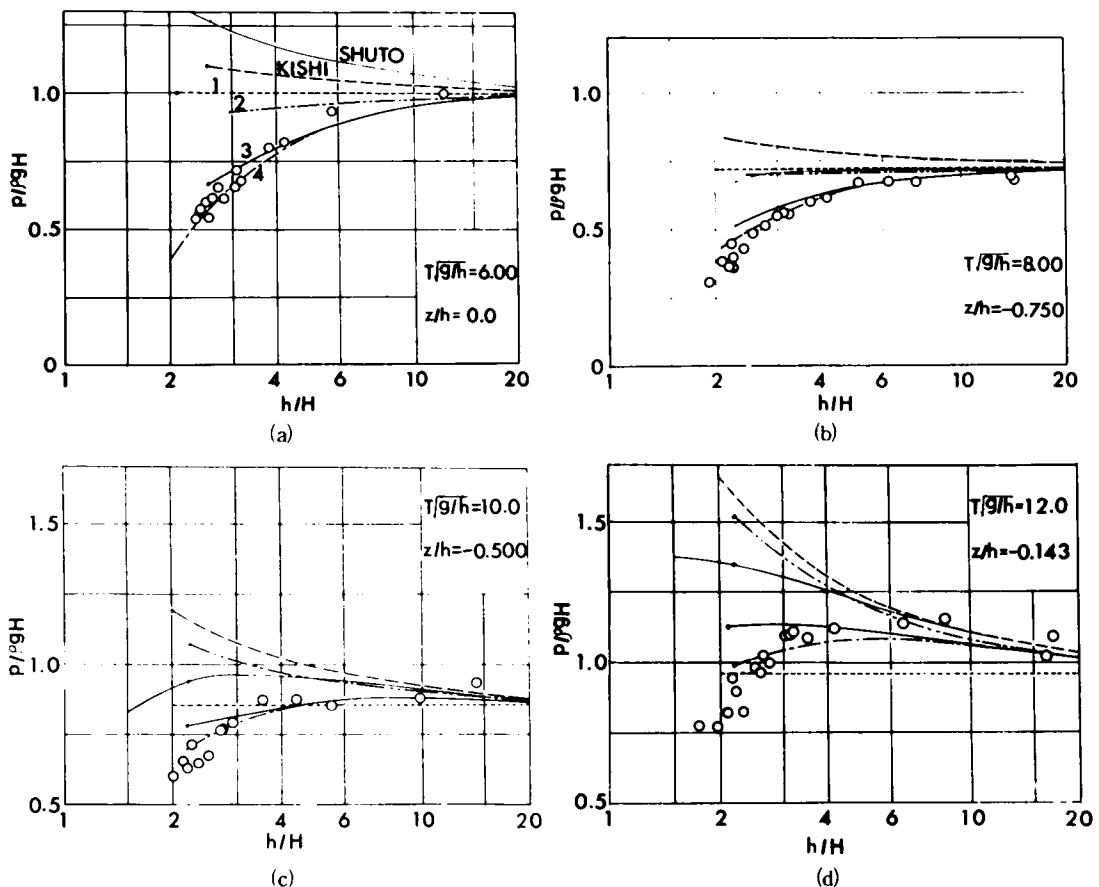


図-4.10

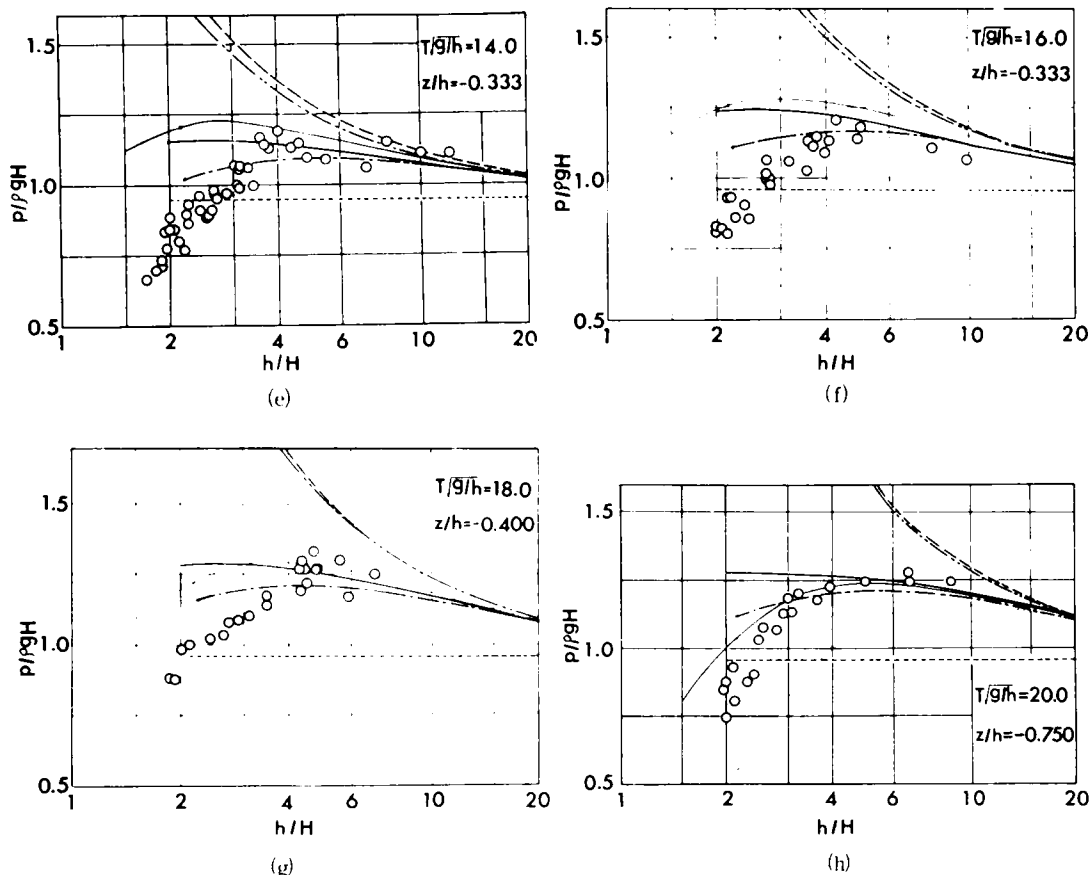


図-4.10 p/pqH の h/H による変化

さて、これらの図によれば、 $T\sqrt{q/h}$ の値がそれほど大きくない場合には、高次級数解と実験結果との適合性がきわめてよく、とくに、第4次近似解は非常に波形こう配の大きい場合まで実験結果と一致する。一方、より低次の近似解たとえば、第3次近似解の場合には $h/H = 3.0$ 付近から実験結果が離れるようになり、その適用限界を見出すことができる。しかし第4次近似解も $T\sqrt{q/h}$ の値がある程度大きくなると、 h/H の値が小さい場合には実験結果と離れるようになり、さらに $T\sqrt{q/h}$ の値が増加すれば、実験結果とそれぞれの理論曲線とのへだたりが生じる h/H の値が定常長波の第2近似解を除いて大きくなる。第1次近似解は波の有限振幅の効果が入っていないために、 h/H の値が小さくなるかあるいは $T\sqrt{q/h}$ の値が大きくなると、その適合性は悪い。また、第2次近似解は近似度不足のためにたとえ $T\sqrt{q/h}$ の値が小さいときでも、 h/H の値が小さくなると、かなり過大な値を与えることがわかる。さらに、定常長波の第2近似解は $T\sqrt{q/h}$ の値が大きくなると、 h/H の値が大きい場合には実験結果とよく一致する。しかし h/H の値が小さくなると、急速にその理論曲線から離れるようになるがその傾向はよくあっている。そこで、合田の方法により残差を補正した定常長波の第2近似解が図-4.10 (h) の細い点線であるが、この場合理論曲線は実験結果よりかなり小さくでている。これは定常長波の第2近似解では表面圧力の残差が大きく、補正がききすぎたためと思われる。

つぎに、水位変動および波圧の時間的変化について実験結果と理論曲線との比較を行なったのが図-4.11である。図-4.11(a)および(b)のように、 $T\sqrt{g/h}$ の値が小さい場合には、 h/H の値がかなり小さく

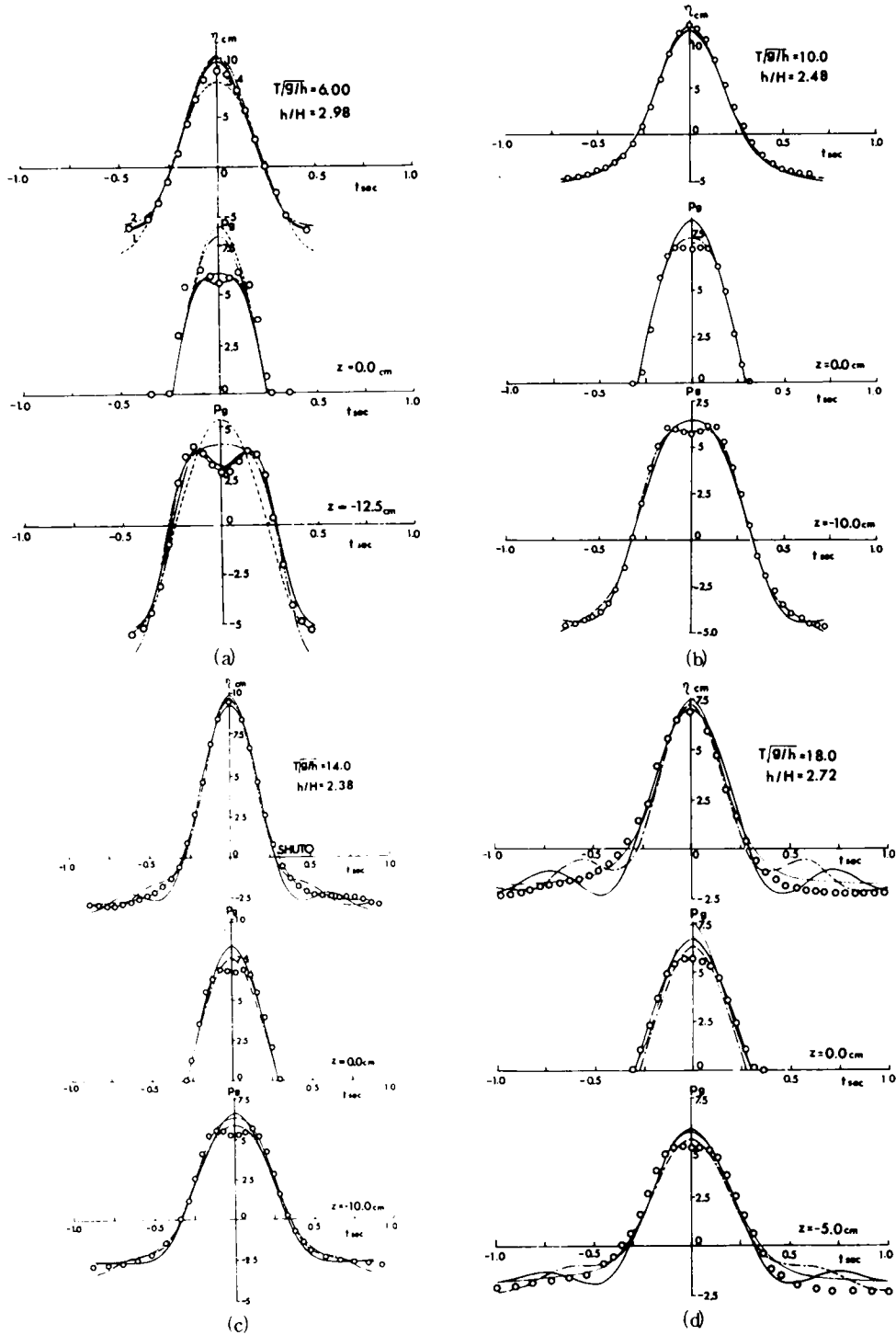


図-4.11 水位変動および波圧の時間的変化

ても、解の近似度をあげるほど実験結果は高次解の理論曲線に近づいており、重複波の波圧の特徴をなす双峯型の波圧波形の出現をよく説明しているのに対して、図-4.11 (c)および(d)のように $T\sqrt{g/h}$ の値が増加すると、解の近似度不足のために第3次および第4次近似解とも波の谷の部分にひずみがあらわれて波形が実験結果と一致せず、また双峯型波圧波形の出現も適確に評価できなくなる。一方、定常長波の第2近似解はかなり h/H の値の小さい場合にも波形については実験結果とよく一致しているが、波圧波形については近似度の不足のため実験結果との適合性が悪い。さらに、広範囲な波の条件に対する計算から、定常長波の第2近似解は双峯型波圧波形の出現を説明できないことが明らかになった。

図-4.12 は波圧について有限振幅重複波の理論曲線と実験結果とを比較した結果を総合して、それぞれの理論解が実験結果と適合しなくなるときの $T\sqrt{g/h}$ と h/H のおおよその範囲を示したものである。この図によれば、第2次近似解の適用範囲は $T\sqrt{g/h}$ の値が小さく、 h/H の値の大きな範囲に限られており実用上注意を要すること、第3次および第4次近似解はその範囲がかなり広いが、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなれば適合性の劣る範囲が存在すること、定常長波の第2近似解の適用範囲が $T\sqrt{g/h}$ の値のかなり大きい領域に限られていることおよび現在の近似理論では現象を十分適確に説明しえない領域が存在することがわかる。ここで注意すべきことは、この適用限界は波圧に関する実験結果と理論曲線との比較から導かれたものであるということである。ところで、以上の考察から水位変動については、第1次近似解では波の非線型効果が入っていないので、現象を十分説明しえず、また定常長波の第2近似解は $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合には、たとえ h/H の値が小さくても波圧式と異なって実験結果との対応がきわめてよいことが明らかにされた。したがって、重複波の他の水理特性を入れた場合は当然、その適用限界の範囲も変わってくるものと考えられる。

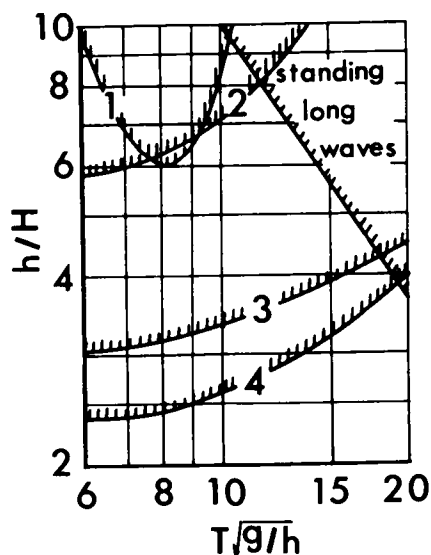


図-4.12 有限振幅重複波理論の波圧に対する適用限界

つぎに、せつ動解の自由表面における境界条件に対する適合性と波圧に対する適用性との関連を検討しなければならない。4.2 で述べたせつ動解の境界条件に対する適合性の検討は主として重複波の波動運動場での全位相に関する平均的なものであり、とくに力学的条件の場合には波圧の時間的变化と関連づけられると考えられる。しかしこれらの詳細な検討は困難であるので、ここでは壁面での波の峯の位相におけるせつ動解の力学的条件に対する適合性と波圧の実験結果に対する適用性との対応関係を考察することにする。

図-4.13 はせつ動解の壁面での波の峯の位相における力学的境界条件に対する誤差の絶対値 $|e_2|$ および波圧の理論結果と実験結果との比 $p_{cal.}/p_{meas.}$ を各近似解との関係で示したものである。これらの図によれば、 $T\sqrt{g/h} = 6.0$ で $h/H = 6.0$ の場合には、高次解になるほど、 $|e_2|$ および $p_{cal.}/p_{meas.}$ の値が急激に減少し、 $p_{cal.}/p_{meas.} = 1$ に近づいていることがわかる。すなわち、この場合にはせつ動解

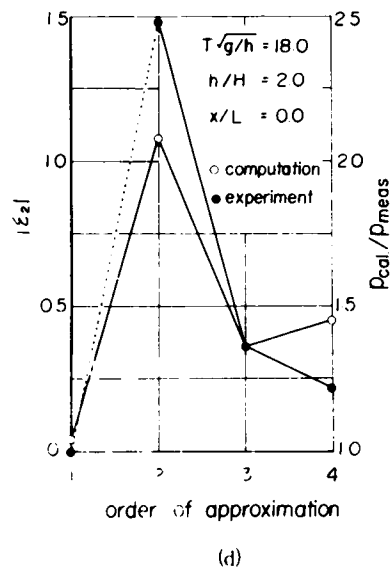
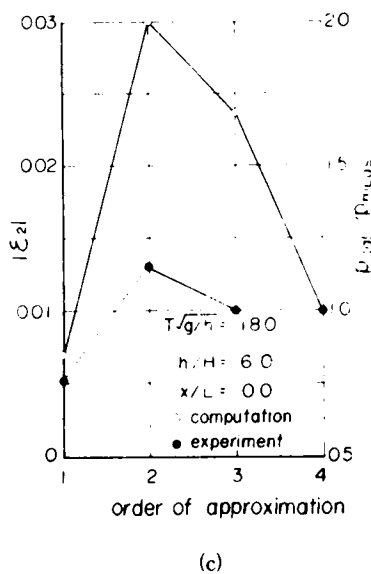
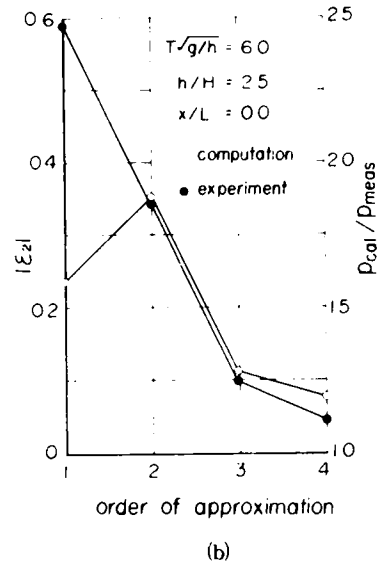
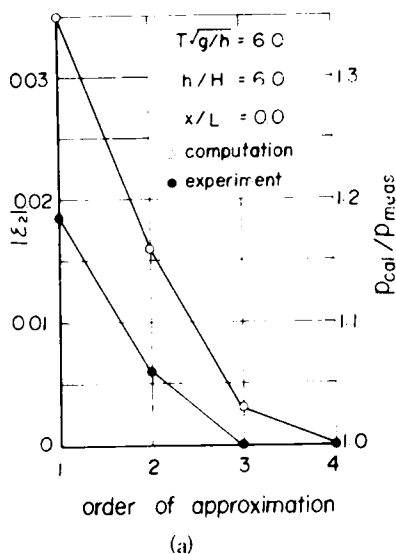


図-4.13 解の高次化による $|\epsilon_2|$ および $p_{cal.}/p_{meas.}$ の変化

の力学的境界条件に対する誤差が減少するほど、波圧に対する適用性がよくなっており、せつ動解の有効性が認められる。また、 $h/H = 2.5$ の場合にも、第2次近似解以上に対しては同様のことがいえる。しかし、第1次近似解の $|\epsilon_2|$ の値は第2次近似解より小さいにもかかわらず、 $p_{cal.}/p_{meas.}$ の値は第1次近似解の方が大きく、 $|\epsilon_2|$ と $p_{cal.}/p_{meas.}$ との対応関係がつかなくなっている。こうした傾向の現われる h/H の値は $T\sqrt{g/h}$ の値が増大するほど大きくなり、図-4.13(d)に示した $T\sqrt{g/h} = 18.0$ で $h/H = 2.0$ の場合には第3次および第4次近似解の間にもこの傾向が見られる。これは $T\sqrt{g/h}$ の値が

大きい場合には、解の高次化によって $|\varepsilon_2|$ の値が必ずしも減少しないにもかかわらず、実験結果との対応がよくなるというせつ動解の欠陥を示すものである。ただし、図-4.13(d)に示した第1次近似解による $p_{cal.}/p_{meas.}$ の値がほぼ 1.0 に近いのは図-4.10(g)からわかるように、 $p/\rho qH$ の h/H による変化に対する実験結果が第1次近似解の傾向とほとんど一致していないにもかかわらず、 h/H の値の減少とともに小さくなって第1次近似解に近づいたためである。すべてのせつ動解についてこの両者の対応関係が見出される $T\sqrt{g/h}$ および h/H の領域は、一応図-4.5(b)に示した解の高次化によって $(E_2)_R$ の減少する領域と図-4.12に示したせつ動解の波圧に対する適用限界の領域の重複する部分によって表わされよう。

図-4.14は図-4.12に示した波圧に対する適用限界における各近似解の波の峯の位相での力学的境界条件の誤差 $|\varepsilon_2|$ の $T\sqrt{g/h}$ による変化を示したものである。この図から第1次および第2次近似解が波圧に対する十分な適用性をもつためには、 $|\varepsilon_2|$ の値が 10^{-2} 以下でなければならないのに対して、第3次および第4次近似解では 5×10^{-1} 以下であればよく、さらにいずれの近似解も $T\sqrt{g/h}$ の値が大きいほど、波圧に対する適用性を保証する $|\varepsilon_2|$ の値が小さくなることがわかる。このことから完全流体の理論結果として導かれた有限振幅重複波理論の境界条件に対する適合性と理論の適用限界とが密接に関係することが明らかになるとともに、せつ動法による解の高次化の有効性が再確認されるはずである。

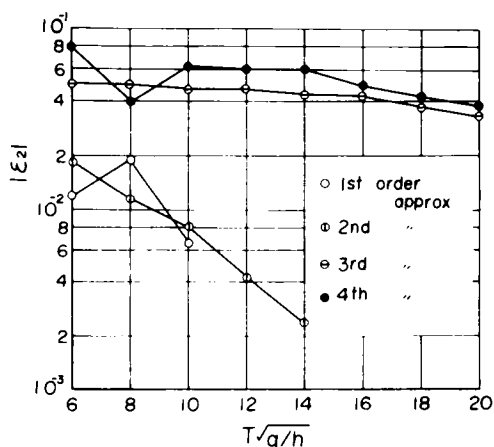


図-4.14 波圧に対する適用限界での $|\varepsilon_2|$ の $T\sqrt{g/h}$ による変化

4.4 越波のある場合の重複波の波圧の特性

ここでは、越波のある場合の重複波の波圧の特性を有限振幅重複波理論との比較において検討した結果について述べるとともに、こうした場合の波圧算定方法を提案する。

4.4.1 実験装置および実験方法

実験に用いた水槽は4.3.1と同一のものである。実験は同一特性の波に対して、越波のない場合と越波のある場合とを交互に行ない、いずれの場合も造波機近くの一様水深部での水位変動と壁面での水位変動および波圧を測定した。記録の解析にあたっては、両者の場合の一様水深部での波高がほぼ同一であることを確認したのち、造波機始動後の数波を除いた同じ波群の4～5波の平均値を用いた。表-4.2に実験条件および実験波の特性を示す。

4.4.2 実験結果およびその考察

図-4.15は $T\sqrt{g/h}$ の値が10, 14および18の場合の実験結果について、静水面上の波の峯高 η_0/H と h/H との関係を図示して、有限振幅重複波理論と比較したものである。図中の1点鎖線は第4次近似解、

表-4.2 実験条件および実験波の特性(越波のある場合)

周期 T sec	水深 h cm	$T\sqrt{g/h}$	半波高 H cm	天端高 H_c cm
1.14	20.0	8.00	4.9 ~ 10.5	5.0
1.43	20.0	10.0	4.4 ~ 12.4	5.0
1.34	17.5	10.0	2.9 ~ 9.9	2.5
1.34	17.5	10.0	4.6 ~ 9.7	5.0
1.34	17.5	10.0	5.3 ~ 8.5	7.5
1.24	15.0	10.0	4.5 ~ 8.6	5.0
1.60	17.5	12.0	3.7 ~ 9.2	5.0
1.73	15.0	14.0	4.0 ~ 9.6	5.0
1.98	15.0	16.0	3.4 ~ 9.1	5.0
2.03	12.5	18.0	3.0 ~ 8.3	5.0

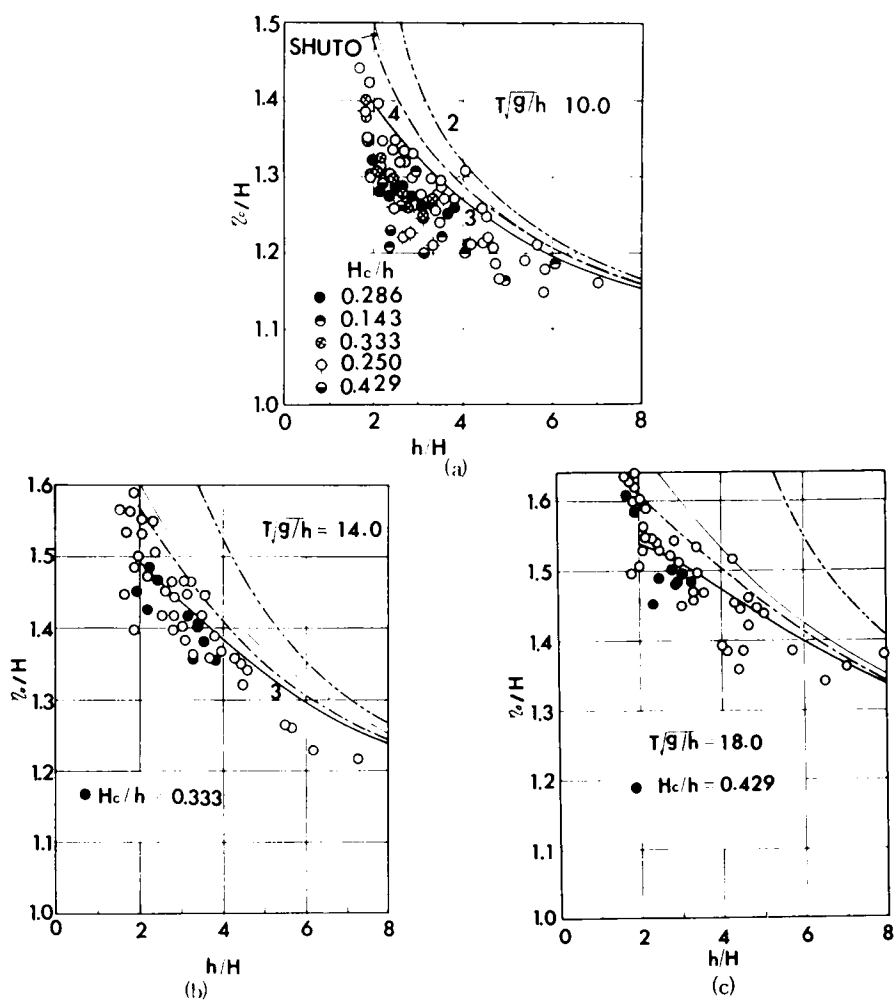


図-4.15 η_c/H の h/H による変化(越波のある場合)

実線は第3次近似解，2点鎖線は第2次近似および細い実線は首藤によって求められた有限振幅定常長波の第2近似解であり，白丸は重複波が越波せず，ほぼ完全重複波とみなせる場合を示し，またその他は天端（戸端高 H_c ）を越えて重複波が越波する場合の実験結果である。この場合， H は越波の有無によらず，壁面における水位変動の振幅に相当するものであり，周期その他の条件を同一にしたとき，越波のある場合は越波のない場合より波高が減少するために，実験結果の横軸が若干右側に移動して図示されることになる。さて， $T\sqrt{g/h} = 10$ の場合，天端高を5ケース変化させたが，実験結果のばらつきが大きいために，越波のある場合の静水面上の波の峯高に対する天端高の影響ははっきりとわからない。しかし，波高が増大して越波量が多くなると，越波のない場合にくらべて，実験結果は若干小さくなる傾向を示しているようである。また， $T\sqrt{g/h} = 14$ および 18 の場合には，今回の実験の天端高の範囲では，越波のない場合の実験結果と同じ傾向を示しており，越波量の増大する h/H の値の小さい領域でも，その傾向はほとんど変わらない。以上の考察から，静水面上の波の峯高に関しては，越波による波高の減少量を考慮すれば，実用上完全重複波として評価することができると考えられる。

図-4.16は，波の峯の位相における同時波圧の無次元量 $p/\rho g H$ の鉛直分布を示したものである。図中の実線は第4次近似解を表わす。このうち，図-4.16(a)は $T\sqrt{g/h} = 8$ のときに越波の有無による波圧変化を検討しようとするものであるが，この図によれば，天端高に比べて，かなり波高が増加しても越波による波高の減少量を考慮すれば，著しい波圧変化は見られず，越波の影響は見かけ上現

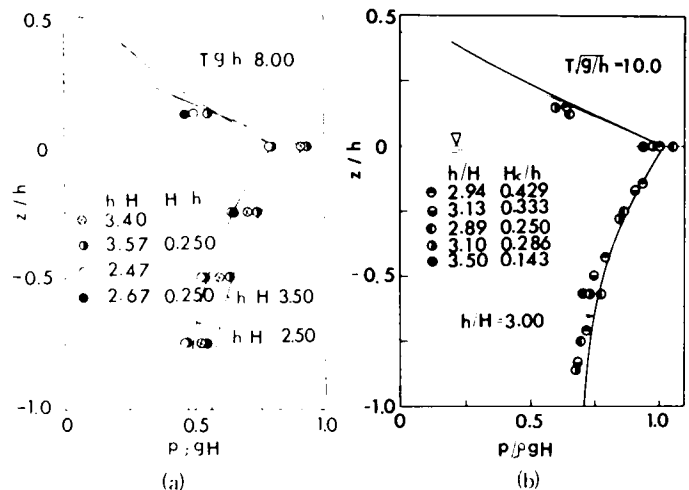


図-4.16 波圧の鉛直分布（越波のある場合）

われないようであって，むしろ完全重複波の理論曲線と比較的よく一致していることがわかる。図-4.16(b)は $T\sqrt{g/h} = 10$ のときの波圧分布に対する天端高の影響を示したものであるが，著者の実験の天端高の範囲では，その変化の範囲が小さいために，波圧分布にあまり影響がみられず，理論曲線とほぼ一致している。ただ， $H_c/h = 0.143$ のときには，波高にくらべて天端高がかなり低くなっており，波圧分布の実験結果は，越波による波高の減少量を考慮しても理論曲線より小さくなっている。

つぎに，各測定点での波の峯の位相に対応する $p/\rho g H$ と h/H との関係を示したのが図-4.17である。図中の点線は第1次近似解であり，ほかの曲線は図-4.15と同じである。図-4.17のうち $T\sqrt{g/h} = 8$ の場合には， h/H の値のあまり小さくない領域では越波の有無にかかわらず，第4次近似解の理論曲線との対応がきわめてよい。しかし，天端高にくらべて波高が増大し，碎波波高近くなると，壁面での波高の減少量を考慮しても越波しない場合より若干実験結果が小さくでている。これは越波量の増加により，

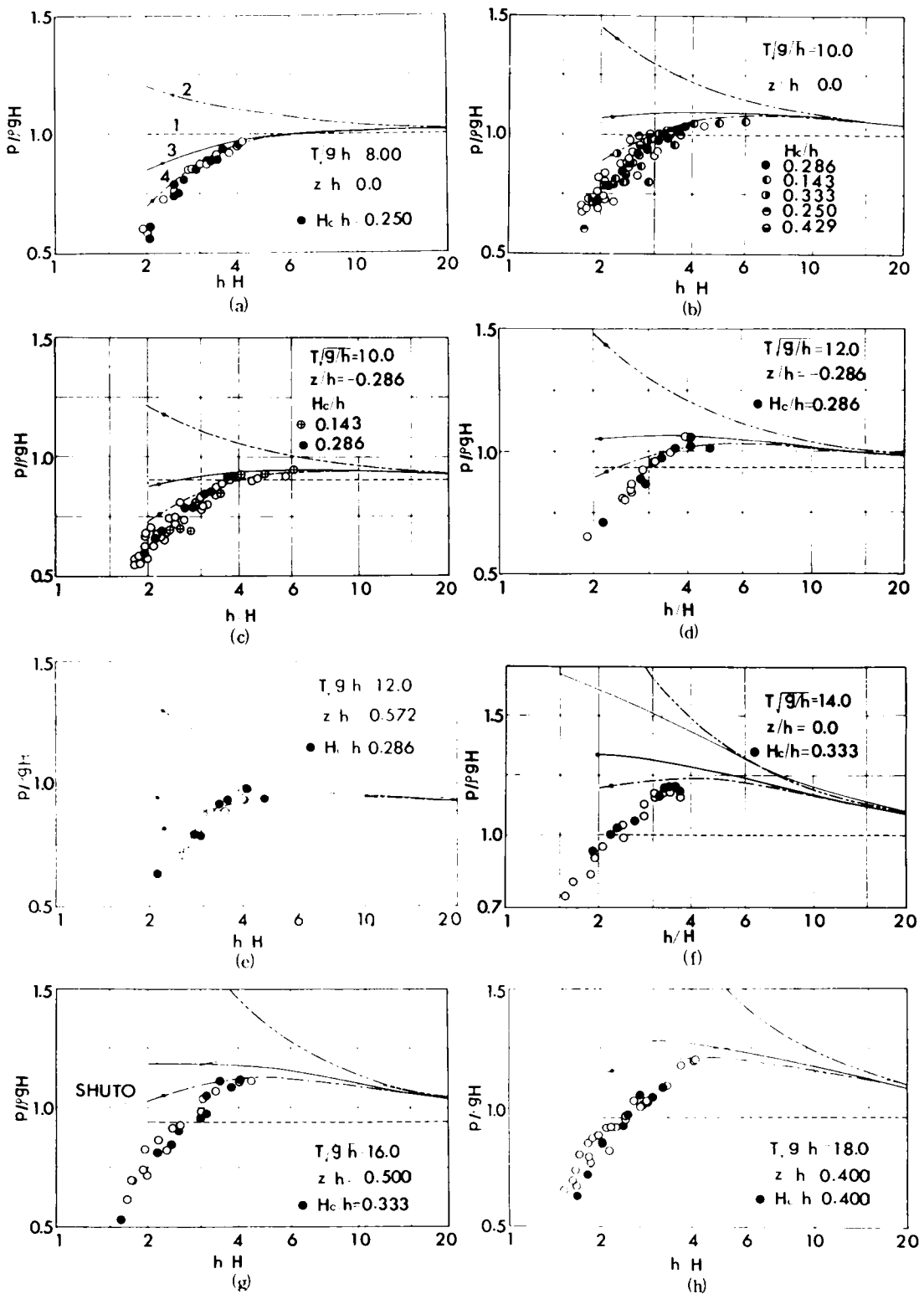


図-4.17 $p/\rho gH$ の h/H による変化 (越波のある場合)

波動運動の場の性質が重複波的なものから部分重複波ないし進行波的なものに変化したためと思われる。また、 $T\sqrt{q/h} = 10$ のときには、 $T\sqrt{q/h} = 8$ のときと同様のことがうかがえるが、とくに (b) を見ると、つぎのことがわかる。すなわち、越波のある場合の波圧は h/H の値の大きいときには、越波のない場合のそれに比べて変わらないが、 h/H の値が減少すれば、後者に比べて前者は小さくなる。しかも、その傾向が現われる限界の h/H の値は、無次元天端高 H_c/h の値が小さいときには大きくなっている。このことは越波現象の場合と同様に、 H/H_c が越波による波圧の減少を支配する重要なパラメーターであることを示していると思われるが、この点に関しては実験の制約上、十分な考察を行なうことができなかった。さらに、 $T\sqrt{q/h} = 12, 14, 16$ および 18 としだいに長周期になるにつれて、越波の有無にかかわらず、4.3 で明らかにした有限振幅重複波理論の適用限界が現われて、実験結果との適合性が悪くなり、しかもその限界の h/H の値は $T\sqrt{q/h}$ の値が増加するほど、大きくなっている。しかし、越波に伴う波圧特性の変化は、この場合にも見かけ上現われていない。

図-4.18 は波の周期や水深などの水理特性が同一の波について、越波のない場合と越波のある場合の壁面での水位変動および波圧の時間的変化を示したもので、白丸および黒丸は越波のない場合とある場合に相当する。これらのうち (a) は $T\sqrt{q/h} = 8$ の場合で、天端高が一定のとき波高の増大に伴い、越波によって水位変動および波圧の時間的変化がどのように変わるかを示すものである。この結果によれば、水位変動については、越波の有無にかかわらず、完全重複波として扱えば、実験結果と理論曲線との対応は比較的よい。波圧変化についてみると、この図より明らかなように、絶対値は同一の波の条件に対して、越波のない場合に比べて減少しているが、壁面での波高の減少量を考慮すると、一般に実験結果と理論曲線とはよく一致している。しかし波高がかなり大きくなると、実験結果と理論曲線との対応が悪くなり、越波のある場合には、双峯型波圧波形の第2のピークがくずれて非対称の波形が現われ、しかも、その傾向は波高が大きくなるほど著しい。とくに、碎波近くのきわめて波高の大きい場合には、この図では明確でないが、水位変動の記録は若干ひずんでいて、対称性が失われていた。また、(b) は $T\sqrt{q/h} = 10$ の場合の波圧に対する天端高の影響を調べるために、2種類の天端高について水位変動および波圧の時間的変化を示したものであり、天端高の大きい場合には越波の有無にかかわらず、実験結果と理論曲線の対応はほぼついている。しかし、天端高が低くなると、越波のある場合、波圧変化については上述した波圧波形の非対称性が現われ、このことから天端高と波高との関係が越波時の波圧現象に対して重要なパラメーターであることが推論される。

すでに前述したように、同一条件の波でも越波のある場合には、越波のない場合に比べて波高が減少する。そこで、この越波による波高の減少量を評価するために、無次元量 H'/H_c と H/H_c との関係を示したものが図-4.19 である。ここに H' は越波のある場合の壁面における水位変動の振幅であり、越波のない場合のそれと区別するために、とくに H' と記号したものである。さて、この図に示したような無次元量を用いると、越波による波高の減少量は全体的にほぼ図中の細い実線で表わされ、実験結果のばらつきのために、周期の影響ははっきり見出されない。その結果、越波に伴う波高の減少量は壁面における水位変動の振幅と天端高の比 H/H_c によって支配されることがわかる。

以上、越波のある場合の重複波の波圧に関しては、 H/H_c の値があまり大きくないかぎり、越波による波

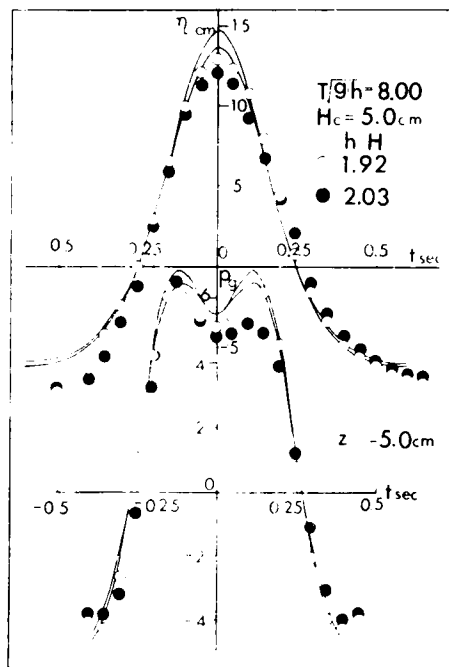
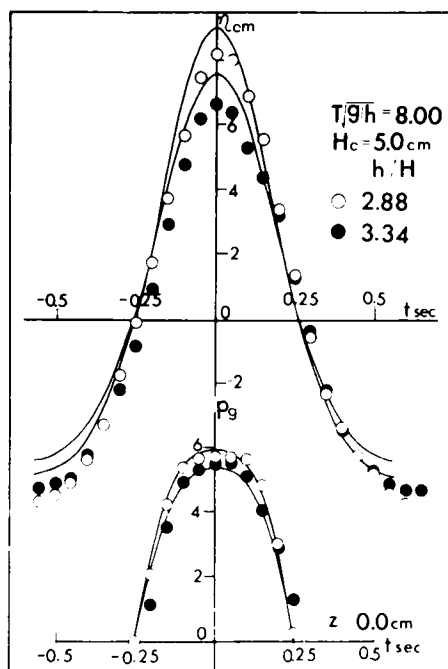
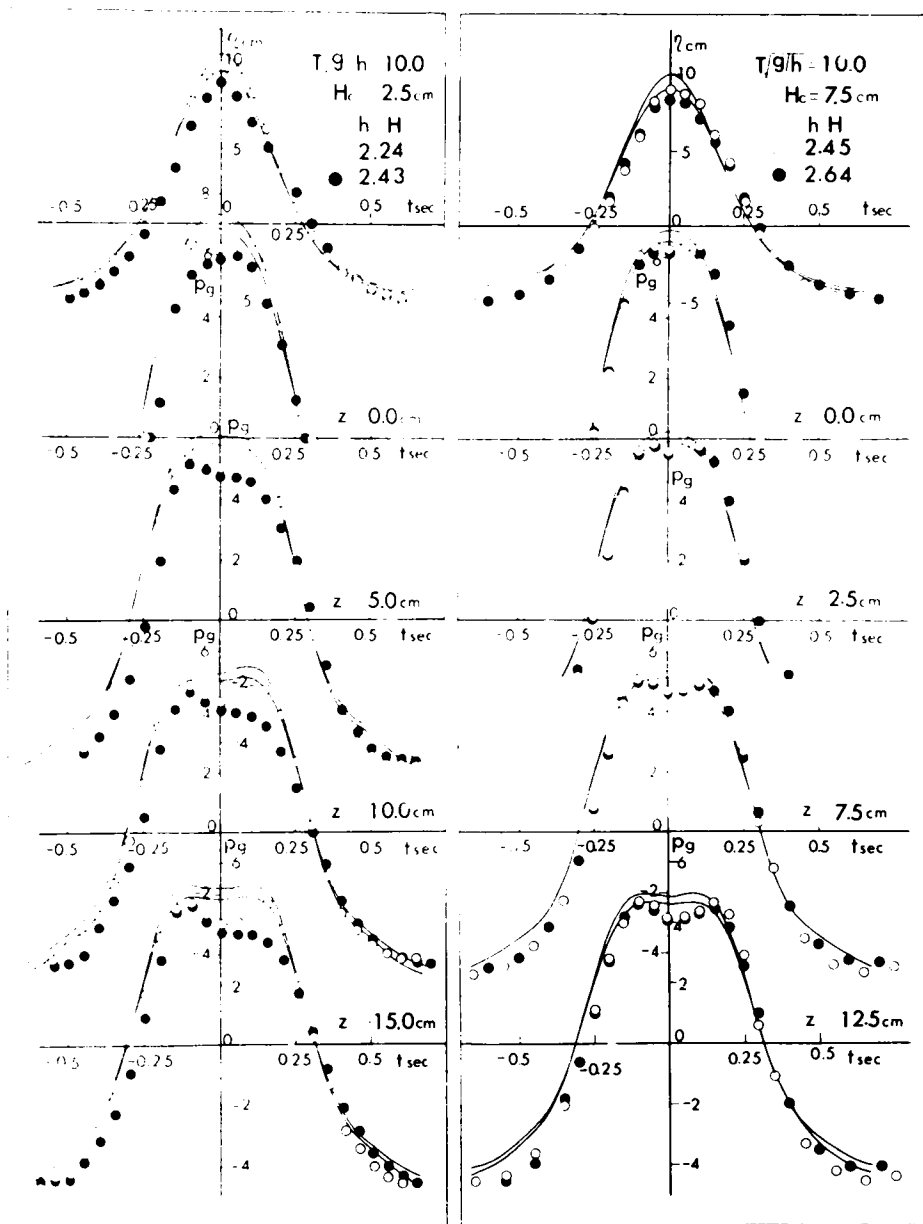


图-4.18



(b)

図-4.18 水位変動および波圧の時間的变化（越波のある場合）

高の減少量を図-4.19 にしたがって考慮することにより便宜的ではあるが、有限振幅重複波の理論解によりある程度その特性が解明できると考えられる。しかしながら、こういった問題の本質的な解明には、たとえば壁面近傍の波形など波動運動場の性質をさらに詳細に検討する必要がある。

4.5 結 語

以上、4.では、せつ動解による有限振幅重複波理論の適合性と適用限界を明らかにして、壁体に作用する波圧の計算法を見出すための基礎研究を実施したが、得られた成果はつぎのように要約される。

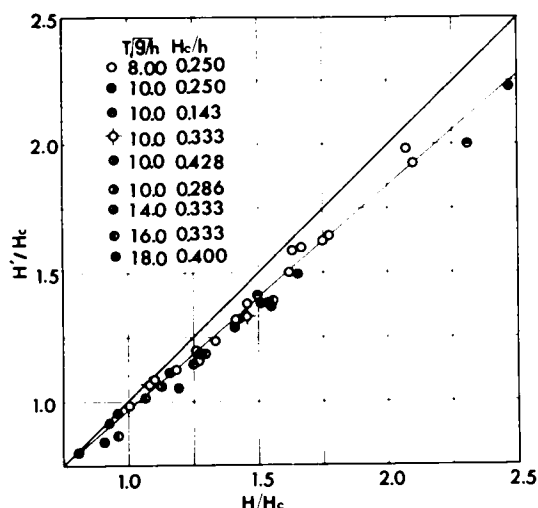


図-4.19 越波による波高の減少量

まず、4.2では波の各種の条件に対してせつ動解の自由表面における2つの非線型境界条件である運動学的条件および力学的条件に対する壁面での誤差を2つの criterion すなわち誤差の最大変化量および自乗平均値として定義され、いずれもせつ動解の全位相に対する平均的な適合性を検討するための基準、を用いて評価し、それらを比較することによって、せつ動解の境界条件に対する適合性を検討した。その結果、criterionの種類および境界条件によって若干の相違はあるけれども、せつ動解は $T\sqrt{q/h}$ の値があまり大きくない場合には、2つの境界条件を平均的によく満足することや、 h/H の値が小さくなれば、 $T\sqrt{q/h}$ の値が小さい場合でも解の高次化によってせつ動解の境界条件に対する適合性は改善されず、一般に $T\sqrt{q/h}$ の値が大きくなるにつれて、その適合性が改善できなくなる h/H の値が大きくなることがわかった。そして、逐次近似を進めるにしたがって境界条件に対する適合性が改善される波の特性の領域を各近似解ごとに、 $T\sqrt{q/h}$ と h/H との関係で表わす図表を提示した。また重複波の全運動場におけるせつ動解の適合性を同様な criterion に基づいて検討し、壁面でのそれと比較した結果、重複波の全運動場においてせつ動解は境界条件を平均的によく満足することがわかった。

つぎに、4.3では、重複波の波圧に対する有限振幅重複波理論の適用限界を明らかにするために、系統的な実験結果と理論結果との詳細な比較検討を行なった。その結果、有限振幅重複波理論は高次解ほど、実験結果をよく説明するが、 h/H の値が小さい場合には、理論の近似度の不足のために、理論曲線と実験結果とのへだたりがかなり大きくなり、実験結果と理論結果が離れる限界の h/H の値は $T\sqrt{q/h}$ の値が大きくなるほど大きいことおよび定常長波の第2近似解は進行波におけるクノイド波理論と同様に、 h/H の値があまり小さくない場合には、 $T\sqrt{q/h}$ の値が大きくなるにつれて、その適合性がよくなることを見出した。そして、以上の結果を総合して、各近似解の波圧に対する適用限界を $T\sqrt{q/h}$ と h/H との関係で表示した図表を提案した。さらに、せつ動解の波の峯の位相における力学的境界条件に対する誤差 $|\epsilon_2|$ と波圧に対する適用限界との関連を検討した。その結果、せつ動解は解の高次化によって $|\epsilon_2|$ の値が第1次近似解の場合を除いて急激に減少するとともに、波圧に対する適用性がよくなることがわかった。

また、 $T\sqrt{g/h}$ と h/H との関係で表示されたせつ動解の波圧に対する適用限界と境界条件に対する適合性との関係の検討から、各近似解が適用限界を満たすための誤差 $|\varepsilon_2|$ の値は、高次解ほど大きくてもよく、したがって高次解ほど適用限界が広くなることが再確認された。

最後に、4.4では、越波のある場合の壁体に作用する波圧特性に関しての有限振幅重複波理論の適用性を検討した。その結果、越波のある場合の波圧は、越波のない場合のそれに比べて、その絶対値は減少するが、越波による波高の減少量を考慮すれば、越波のない場合の実験結果とほぼ同じ傾向をもつようになり、その範囲内では、有限振幅重複波理論が適用できることがわかった。しかし、 h/H の値が小さくなり、しかも H_c/h の値が小さい場合には、直立壁前面における波動運動の場の性質が重複波的なものから部分重複波ないしは進行波的なものに変化するために、越波による波高の減少量を考慮しても十分現象を説明できず、条件によっては双峯型の波圧波形がくずれて非対称な波圧波形が現われることがわかった。そしてこの場合の波圧変化に対しては、 H/H_c が重要なパラメータであることを指摘し、波圧の推定における実用的なつぎの方法を提案した。すなわち、越波に伴う壁面における波高の減少量は実験の範囲内では、周期にそれほど関係せず、ほぼ H/H_c によって決定されるので、実用上越波のある場合の壁体に作用する波圧は H/H_c の値の大きい場合を除き、図-4.19を用いて H/H_c より H'/H_c を求め、波高として、 $2H'$ を用いて有限振幅重複波理論を適用すれば評価できることを示した。

参 考 文 献

- 1) Sainflou, G.: Essai sur les Diques Maritimes Verticales, Annales des Ponts et Chaussees, Vol.98, No.4, 1928.
- 2) Gourret, M.: Sur Mouvement Approche des Clapotis, Application au Calcul des Diques Maritimes Verticales, Annales des Ponts et Chaussees, Vol.105, No.16, 1935.
- 3) Miche, M.: Mouvements Ondulatoires de la Mer on Profondeur Constante on Décroissante, Annales des Ponts et Chaussees, Vol.121, No.3, 1944.
- 4) Biesel, F.: Equations Générales au Second Ordre de la Houle Irrégulière, La Houille Blanche, No.3, 1951, pp.372~376.
- 5) Carry, C.: Clapotis Partiel, La Houille Blanche, No.4, 1953, pp.483~494.
- 6) Penny, W. G. and Price, A. T.: Finite Periodic Stationary Gravity Waves in a Perfect Liquid, Phil. Trans. A., Vol.224, 1952, pp.254~284.
- 7) Taylor, Sir G.: An Experimental Study of Standing Waves, Proc. Roy. Soc. A., Vol.218, 1953, pp.44~59.
- 8) Suquet, F. and Wallet, A.: Basic Experimental Wave Research, Proc. Minnesota Int. Hyd. Conv., I. A. H. R., 1953, pp.173~191.
- 9) D'Hiers, G. C.: Étude du Clapotis, La Houille Blanche, No.2, 1960, pp.153~163.
- 10) Tadjbakhsh, I. and Keller, J. B.: Standing Surface Waves of Finite Amplitude, Jour. Fluid Mech., Vol.8, 1960, pp.442~451.

- 11) 合田良実・柿崎秀作：有限振幅重複波ならびにその波圧に関する研究，運輸省港湾技術研究所報告，第5巻10号，1966，pp.1～50.
- 12) Mack, L. R., Benny, E. J. and Sattler, F. S. : Standing Gravity Waves of Finite Amplitude, in Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol.3, Pergamon Press, 1966.
- 13) Concus, P. : Standing Capillary-Gravity Waves of Finite Amplitude, Jour. Fluid Mech., Vol.14, 1962, pp.568～576.
- 14) Verma, G. R. and Keller, J. B. : Three Dimensional Standing Surface Waves of Finite Amplitude, Phys. Fluid, Vol.5, 1962, pp.52～56.
- 15) Mack, R. : Periodic Finite-Amplitude, Axisymmetric Gravity Waves, Jour. Geophys. Res., Vol.67, 1962, pp.829～843.
- 16) Hamada, T. : The Secondary Interaction of Surface Waves, Report of Port & Harbor Res. Inst., No.10, 1965, pp.10～28.
- 17) 首藤伸夫：有限振幅の定常長波，第15回海岸工学講演会講演集，1968，pp.212～219.
- 18) 永井莊七郎：波圧論，1966年度水工学に関する夏期研修会講義集，66-14，土木学会水理委員会，1966.
- 19) 浜田徳一・光易 恒・長谷直樹：構造物に作用する波力，第3回海岸工学講演会講演集，1956，pp.67～83.
- 20) Dean, R. G. : Stream Function Wave Theory ; Validity and Application, Santa Barbara Specialty Conf. on Coastal Eng., 1965, pp.269～299.
- 21) Dean, R. G. : Relative Validities of Water Wave Theories, Proc. Conf. on Civil Eng. in the Oceans, 1967, pp.1～30.
- 22) 岸 力：海岸堤防に関する研究(2) — 有限振幅の浅水重複波 —，建設省土木研究所報告，90号，1955，pp.1～28.

5. 結 論

以上、著者は本論文において、有限振幅波理論に基づく波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響の解明という立場から、非碎波の波によって剛な小口径柱体、大口径円柱および壁体に作用する波圧・波力の適確な推定法の確立のために、系統的な基礎研究を行なったが、得られた主要な研究成果を要約して、本論文の結論としたい。

まず、1.においては、柱体や壁体に作用する波圧・波力の適確な推定法の確立が海洋開発などに伴う海洋構造物の設計に必須であり、また海岸工学や海岸水理学上の基礎的課題であることを指摘するとともに、これらの問題の究明においては従来の研究が必ずしも十分でないことを述べて、本研究の目的および研究方法と内容の概要を述べた。

2.においては、波長に比べて柱体の特性長が十分小さく、柱体による波の変形を無視できる場合について、非碎波の波による全波力の推定法を確立するために、鉛直円柱、鉛直角柱および水平円柱を対象とした基礎研究を行なった。すなわち、まず現在の有限振幅進行波理論では、波速の決定のために Stokes の第1および第2定義といわれる付加的条件が必要であり、従来の研究ではこれらの定義による理論結果の差異が明確でないことを指摘するとともに、Stokes の第2定義を用いて Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第3近似解を追計算した。そして、波速、水位変動および水粒子速度に関する理論および実験結果との比較から、水位変動については波速の定義による相違はなく、実験結果と比較的よく一致するのに対して、波速および水平水粒子速度はむしろ第2定義による Stokes 波の第4次近似解と一致することを見出した。このことから、波力の推定に用いる有限振幅波理論としては、第2定義によるものの方がより適切であることを指摘した。また、Laitone によるクノイド波理論は著者が追計算した Chappellear のそれより低次の近似解であることを解析的に明らかにして相互の関係を見出した。つぎに Morison の波力算定式に有限振幅波理論を導入し、柱体に作用する全波力の計算式を誘導するとともに、これらを用いて鉛直円柱、鉛直角柱および水平円柱の実験結果から抗力係数および質量係数を推定し、波や柱体の特性との関連を詳細に検討した。その結果、いずれの抗力係数も Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数の関数となり、同一の Reynolds 数に対して Keulegan-Carpenter 数の大きいほど、その値が小さくなることや水平円柱の場合には proximity effect や鉛直水粒子速度による水平方向の揚力および水粒子速度のこう配の影響などを受けるので、水平水粒子速度を用いて評価された抗力係数は鉛直円柱の場合に比べて若干大きくなることを見出した。一方、質量係数は波高・柱体特性長比とともに若干減少するが、水平円柱の場合にはこのほか、設置水深の影響や proximity effect を受けることを明らかにした。また、これら両係数を一定として計算される全波力の時間的変化と実験結果とを比較して、両係数の位相変化は全波力の時間波形にそれほど影響しないことを見出した。ついで、これらの関係で表示された両係数を用いた場合の有限振幅波理論による全波力の計算結果は、鉛直角柱の場合には実験結果より若干小さくなるが、鉛直円柱および proximity effect が無視される水平円柱に対しては、実験結果とよく一致することが確か

められた。さらに、鉛直柱体の全波力の最大値は、実験結果の範囲内で波高・柱体特性長比と密接に関連づけられることを示すとともに、この傾向は波や柱体の特性との関係で表示された両係数を用いれば、理論計算によってもある程度説明できることを示した。一方、水平円柱の波力の最大値は波高・柱体特性長比と水深・波高比に依存しており、比水深や設置水深によってそれほど変化しないことおよび水底のごく近傍では proximity effect が現われて波力がかえって増大することを実験的に見出した。最後に、傾斜海浜上の鉛直円柱に作用する全波力と波や円柱の特性との関係を検討し、この場合の非砕破の波による全波力の推定に対しても有限振幅波理論を用いた波力算定式の適用が可能であることを示した。

3.においては、大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型効果を究明する観点から、せつ動法を用いて非線型回折波理論の第2次近似解を求め、波圧、水位変動および全波力の表示式を導いた。そして、波の非線型性を考慮した場合には、これらの時間波形が非対称になることや全波力の最大値および最小値に及ぼす波の非線型効果は比水深の小さい場合を除いてかなり小さいことを明らかにした。さらに、質量係数は直径・波長比のみでなく、比水深、水深・波高比および位相によって変化し、比水深が大きく、水深・波高比が小さいほど、減少することを理論計算によって明らかにした。また、波圧、水位変動および全波力に関する実験結果との比較から、著者の理論の妥当性が確かめられた。その結果、とくに波圧に対しては、円柱前面において波の非線型効果が強く現われることや円柱側面において時間波形の非対称性をもっとも顕著になり、円柱前面および後面に近づくにつれて、その度合が小さくなることを明らかにした。

4.においては、壁体に作用する波圧の適確な計算法を見出すために、せつ動解による有限振幅重複波理論の境界条件に対する適合性と実験結果への適用限界を検討した。すなわち、まずせつ動解の全位相についての平均的な適合性を検討するための基準を用いて、せつ動解の自由表面における2つの非線型境界条件に対する誤差を評価し、それらを比較することによって、せつ動解の境界条件に対する適合性を検討した。その結果、せつ動解は比水深の値が大きい場合には、境界条件に対する適合性がよいが、比水深の値が小さくなるにつれて、悪化することを示し、また、逐次近似を進めるに従って、境界条件に対する適合性が改善される領域を図示した。ついで、波圧の実験結果との詳細な比較から、せつ動解の波圧に対する適用限界を波の特性との関係で図示した。また、波の峯の位相におけるせつ動解の力学的境界条件に対する誤差と波圧に対する適用限界との関連を検討した結果、せつ動解は比水深の値が比較的大きい場合には、解の高次化によって境界条件の誤差が急激に減少するとともに、波圧に対する適用性がよくなることおよび各近似解が適用限界を満たすための境界条件の誤差は高次解ほど大きくてよく、いいかえれば高次解ほど適用限界が広くなるという前述した適合性と適用限界との相互関係を明らかにすることができた。さらに、越波のある場合の壁体に作用する波圧特性に対して、有限振幅重複波理論の適用性を検討し、この場合の波圧は越波による波高の減少量を考慮すれば、その適用範囲内では有限振幅重複波理論によって推定できることを明らかにした。

以上、本論文では、構造物に作用する波圧および波力に及ぼす波の非線型効果の解明という観点から、非砕破の波によって剛な柱体や壁体に作用する波圧・波力に関する系統的な基礎研究を実施して、新しい多くの知見が得られたけれども、実際上なお残された問題も少なくなく、さらに研究を進める必要があるが、これらの研究成果が沿岸海洋構造物の設計や沿岸海洋災害の防止に資するところがあれば、著者の望外の

喜びとするものである。

最後に、本研究の全過程にわたって終始一貫して暖かい御指導と適切な御助言をいただいた京都大学防災研究所土屋義人教授に深甚な謝意を表明するとともに、本研究の端緒を与えられ、御教示御激励くださった京都大学工学部長尾義三教授および岩垣雄一教授に深く感謝する次第である。また、本論文作成にあたって御助力いただいた防災研究所芝野照夫助手ならびに海岸災害部門の諸氏に謝意を表明する。